This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

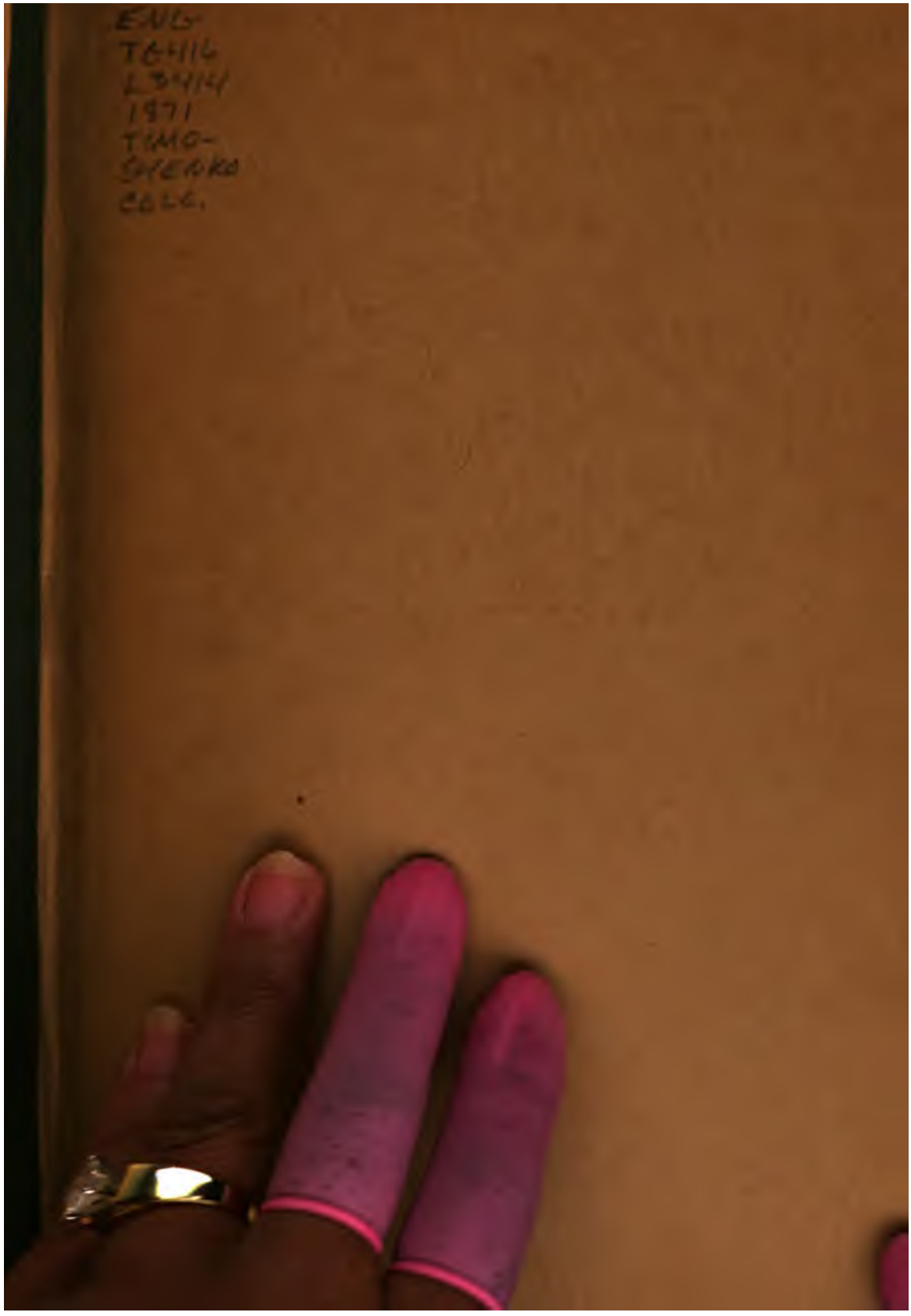
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

S. TIMOSHENKO


ENG
TA416
L3414
1971
TIMO-
SPEARO
COLL.

13
L

CALCUL ET CONSTRUCTION

DES

PONTS MÉTALLIQUES

PAR

MM. FR. LAISSLE et AD. SCHUEBLER,

INGÉNIEURS.

Traduit de l'allemand
avec l'approbation des auteurs.

Tome premier.

STUTTGART.

PAUL NEFF, ÉDITEUR.

1871.

Imprimerie de Woerner et Comp. à Stouttgart.

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre premier.

Développement des principes fondamentaux.

§. 1. Préliminaires.

page

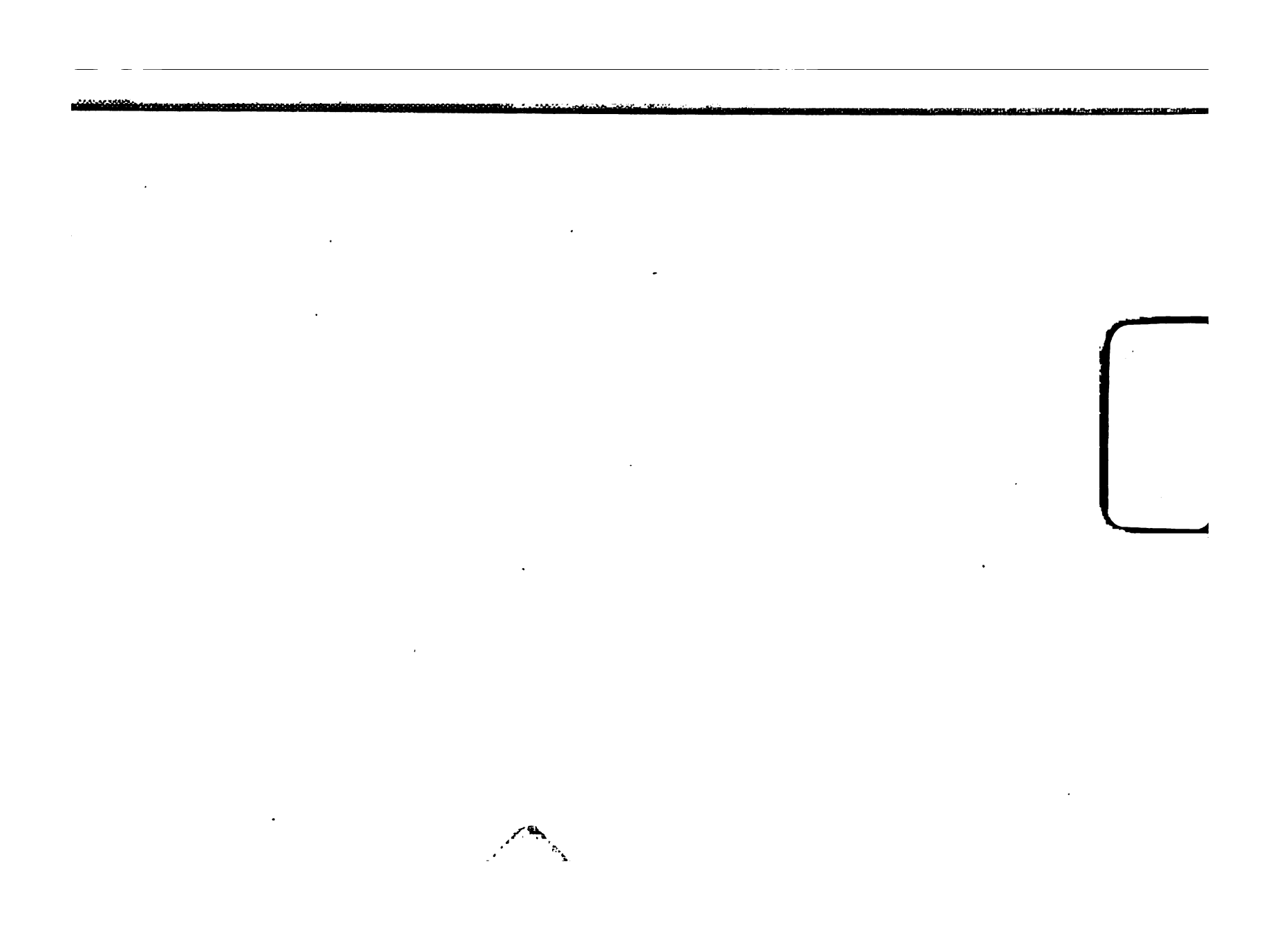
1—2. Classification des ponts 1

§. 2. Développement des conditions d'équilibre et leur application spéciale aux ponts-poutres.

3. Forces extérieures et intérieures 3
4. Moment de flexion et effort tranchant; moment de résistance et résistance verticale 4
5—7. Conditions d'équilibre des ponts-poutres 6

§. 3. Etude de la résistance des corps prismatiques.

8. Résistance à l'extension et à la compression 9
9—11. Module d'élasticité 9
12. Résistance au cisaillement 13
13—17. Résistance à la flexion et moments d'inertie 14
18—20. Position de la ligne des fibres invariables (ligne élastique) et grandeur de la flexion 27
21—23. Méthode de Mr. Clapeyron pour des poutres continues . . . 30
24—26. Forces rasantes dans l'intérieur d'une poutre chargée . . . 34
27—28. Exemples de l'effort de tension oblique pour des poutres à parois en tôle 41



ENG
T8416
L3414
1871
TIMO-
SHENKO
COLL.

15
L

page

102—105. Déduction des logements des rivets et distance des rivets 165
106. Armatures aux extrémités des ponts 168
107. 108. Règles pratiques pour la détermination des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ en pour des ponts à parois en tôle 169

§. 13. Pont à poutres en tôle, de 15 mètres de portée.

109—110. Description du pont et calcul des poutres principales . . 173
111. Entretoises et longrines-sous-rails 177
112. Poids des diverses parties du pont 179
113. Calcul de l'effort de tension oblique dans les poutres maîtresses et dans les entretoises 182

§. 14. Pont de chemin de fer près de Langon.

114—115. Description du pont et calcul des poutres principales. . . 184
116—117. Propre poids du pont 187
118. Armatures de la paroi verticale des poutres principales 188
119—120. Rivets et leur construction 190
121. Poids des diverses parties du pont 193

Appendice.

Rapports des poids et mesures de divers pays 194

Résumé

des notations employées.

Les notations suivantes, qui arrivent fréquemment dans le cours de cet ouvrage, ont toujours les significations ci-après désignées:

P — une force connue en direction et en grandeur, agissant en un point donné.

E — le module d'élasticité.

$\mathfrak{A}$ — l'effort par unité carrée d'une pièce soumise à la traction.

$\mathfrak{B}$ — l'effort par unité carrée d'une pièce soumise à la compression.

$\mathfrak{C}$ — l'effort rasant, c'est-à-dire la force de cisaillement par unité carrée.

Θ — le moment d'inertie d'une section.

Ω — la section de la nervure ou semelle d'une poutre.

H — la hauteur totale d'une poutre.

$\mathfrak{H}$ — la distance des points d'application des tensions et des compressions dans la section d'une poutre chargée.

$\mathfrak{H}_0$ — la distance des deux nervures d'une poutre.

a (b) — la distance à l'axe neutre des fibres extérieures longitudinales soumises à la tension (ou à la compression).

a_0 (b_0) — la distance à l'axe neutre des centres de gravité des nervures soumises à la tension (ou à la compression).

δ — l'épaisseur de la paroi verticale d'une poutre à parois pleines.

l — la portée d'une poutre quelconque.

$a, b, c \ldots$ — les portées d'une suite de travées de pont à poutres continues.

$A, B, C \ldots$ — les appuis successifs d'un pont à plusieurs travées, et aussi les réactions sur ces appuis.

p — le propre poids d'un pont par unité de longueur, calculé en général pour une voie de chemin de fer.

k — la surcharge sur le pont par unité de longueur.

$q = p + k$ — la charge totale par unité de longueur.

$\mathfrak{M}$ — le moment de flexion, ou le moment des forces extérieures.

$\Sigma X y$ — le moment de résistance d'une poutre, de valeur égale à $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{V}$ — la somme des composantes verticales des forces extérieures — somme ordinairement nommée l'effort tranchant.

ΣY — la résistance verticale de la coupe considérée d'une poutre, de valeur égale à $\mathfrak{V}$.

CHAPITRE PREMIER.

Développement des principes fondamentaux.

§ 1.

INTRODUCTION.

1. Les parties principales d'un pont sont: les *soutiens* (piles et culées), les *maîtresses poutres* ou *fermes* et le *tablier*; ce dernier consiste en un plancher servant au passage de chariots ou de piétons ou bien à celui d'une ou de plusieurs voies ferrées; dans les ponts en pierre et généralement dans les ponts en fer de faible ouverture, le tablier est placé immédiatement au-dessus des fermes, dans la plupart des autres cas, il se trouve entre les fermes, relié à celles-ci par des *pièces de pont* ou des *entretoises*. — Comme faisant partie du pont, on distingue encore: le *contre-ventement*, système de croisillons qui ne peut être supprimé que lorsque les fermes ou le tablier possèdent une rigidité suffisante pour s'opposer aux oscillations latérales, et enfin le *garde-corps*, lorsqu'il n'est pas formé et remplacé par les fermes elles-mêmes.

La construction des fermes devant faire l'objet principal de cet ouvrage, nous classifierons les ponts d'après la forme des maîtresses poutres; celles-ci présentent, pour autant qu'elles ne sont pas des poutres homogènes, dans toute la longueur du pont des *tiges* ou *nervures* dont la disposition nous donne la classification suivante:

1° Les *ponts en arc*, où chaque ferme se compose d'une tige convexe savoir *l'arc*, qui est stable par son mode de construction.

2° Les *ponts en chaînes* ou *ponts suspendus*; chaque ferme se compose d'une tige concave, de la *chaîne*, qui tend à se mettre en équilibre sous chaque charge qu'elle est destinée à supporter; cet équilibre n'est en général possible que par un changement de forme de la chaîne, lequel produit des oscillations tant verticales qu'horizontales; ces dernières pourraient être supprimées, quand on

donnerait à la chaîne une disposition telle qu'elle fût capable, comme l'arc, d'une résistance suffisante dans le sens vertical pour ne plus se déformer, mais par là les avantages principaux de la chaîne disparaîtraient; la théorie des ponts en arc et des ponts en chaînes sera donc toujours différente.

3° Les *ponts-poutres*, aussi nommés *ponts à poutres droites*, dans lesquels chaque ferme se compose de deux tiges ou nervures, courbées ou droites; ces tiges sont toujours reliées entr'elles sur toute leur longueur par un système de *barres* ou par une *paroi verticale pleine*, suffisante pour que chaque déformation d'une des nervures nécessite en même temps celle de la poutre entière, comme cela arrive dans une poutre formée d'une seule pièce.

L'arc aussi bien que la chaîne exerce sur les culées un effort horizontal, précisément parce qu'ils ne sont formés que *d'une* seule tige. Cet effort horizontal peut être détruit par l'emploi d'un tirant ou corde sans que ce système rentre dans celui d'une poutre droite, puisqu'il y manque la liaison intime entre la tige et la corde, cette dernière n'étant qu'une construction auxiliaire qui a pour but, d'obtenir la stabilité des culées. — On peut se figurer un pont composé à la fois d'un arc et d'une chaîne, ensorte que les tiges concaves et convexes annulassent leurs efforts horizontaux respectifs, sans qu'on eût recours à un système intermédiaire semblable à celui que présentent les poutres droites. — L'emploi de tels ponts est en tout cas peu fréquent et ne pourrait avoir lieu que dans des conditions tout-à-fait exceptionnelles.

2. Nous diviserons notre sujet en divers chapitres; dans le premier nous développerons *les conditions d'équilibre*, ayant surtout égard aux *ponts-poutres* dont l'emploi est très-fréquent et qui, dans tous les systèmes de construction, forment des parties intermédiaires presque toujours indispensables; nous y ajouterons encore l'étude de la résistance des corps.

Les deux chapitres qui suivent ne forment pour ainsi dire qu'un complément de quelques théories contenues dans le premier chapitre; le second contiendra *les résultats d'expériences* sur la résistance des matériaux (les coefficients de résistance); dans le troisième chapitre, nous développerons pour des ponts-poutres et pour chaque coupe, *les forces et les moments de forces* variant pour diverses dispositions et portées.

Dans le quatrième chapitre, nous commençons à donner *des règles pratiques* pour chaque espèce de construction, en les basant sur les théories développées dans le premier chapitre et en employant toujours les résultats consignés dans le second et dans le troisième chapitre. — Ces formules pratiques sont énoncées de manière qu'on pourra obtenir directement les tensions ou les pressions qui agissent sur la matière d'après les données principales et les dimensions du pont; ou bien étant données les ten-

sions ainsi que les éléments principaux du pont, on pourra en déduire les dimensions de coupe à adopter; nos formules pratiques s'appliquent également aux deux cas.

§ 2.

Développement des conditions d'équilibre et leur application spéciale aux ponts-poutres droites.

3. Pour qu'un corps soit en repos, il faut que les forces agissant sur ce corps se fassent équilibre.

La *pesanteur* est la force principale à laquelle doivent résister les constructions des ponts; elle se compose du *poids de la construction elle-même* et de la *surcharge*. Pour un pont de route, la surcharge est fournie par le poids d'une colonne serrée ou de pesants chariots venant à passer sur le pont; pour un pont de chemin de fer, par celui d'une ou de plusieurs locomotives avec tender, suivies de wagons chargés qui s'étendent sur toute la longueur du pont.

Les autres forces verticales sont de peu d'importance, une légère addition à la surcharge y suffira. La *force résultant des coups de vent*, qui agissent dans un sens plus ou moins horizontal, est toujours peu considérable comparativement à celle de la pesanteur, toutefois sa direction étant toute différente demande une disposition spéciale, le *contreventement*.

Les dimensions principales du pont sont déterminées en général par les forces verticales, propre poids plus surcharge; mais il faut de plus que, dans le sens horizontal, le pont présente une ferme de résistance suffisante. — Dans des cas spéciaux on pourra, si l'on veut calculer le contreventement, se servir de la table suivante donnée par M. Morin:

Table I.

Vitesse du vent en mètre par seconde.	Pression en kilogrammes contre une surface d'un mètre carré choquée directement.
3,00 M.	1,047 Kilogr.
5,00 M.	2,908 „
8,00 M.	7,443 „
10,85 M.	13,691 „
14,00 M.	22,790 „
20,00 M.	46,520 „
40,00 M.	186,080 „

Remarque. Il sera d'ordinaire suffisant de prendre 150 kilog. par mètre carré de surface perpendiculaire à la direction du vent.

Les forces extérieures que nous supposons données, déterminent *des réactions sur les appuis* telles, que toujours, tant en direction qu'en intensité, les conditions d'équilibre se trouvent remplies.

Ce n'est que par des changements infiniment petits des appuis eux-mêmes, que peuvent s'opérer les variations de direction et d'intensité des réactions sur les appuis; nous verrons dans la suite comment nous pourrons toujours déterminer ces réactions, lorsque les positions des surcharges sont connues.

Il est absolument nécessaire de connaître d'avance les forces extérieures, si l'on veut déterminer les *forces moléculaires* ou *forces intérieures*, c'est-à-dire les pressions ou les tensions.

La seconde opération de tout calcul statique est donc: *connaissant les forces extérieures, trouver pour un point quelconque d'un système, les forces moléculaires, c'est-à-dire la pression, ou la tension par unité de surface.*

A cet effet, nous remarquerons que, si dans une construction sur laquelle agissent les forces extérieures, nous faisons une section quelconque, nous obtiendrons deux parties, qui en général tendraient à se mettre en mouvement sous l'action de ces forces, si *les forces moléculaires qui agissent à la surface de la coupe considérée* ne suffisaient pas exactement à former équilibre avec les forces extérieures.

C'est donc en recherchant les conditions d'équilibre que nous trouverons *les résultantes des forces moléculaires agissant dans chaque coupe*; elles se composent en général d'une force et d'un couple.

Il serait sans doute très-difficile pour un corps de forme quelconque de déterminer par la résultante ainsi trouvée les forces qui agissent dans chaque partie de la coupe transversale; heureusement que dans les constructions et surtout dans celles de pont, où chaque partie est construite dans un but déterminé, où existe un arrangement régulier, cette difficulté est par là tournée et nous pourrons dans chaque cas déterminer les lois d'après lesquelles les forces agissent sur chaque élément; le mode de recherche variera selon les circonstances spéciales, ainsi que nous le verrons dans la suite.

4. Les conditions d'équilibre sont intimement liées à nos recherches, puisque ce sont elles qui nous fourniront le moyen de trouver les forces moléculaires, dès que nous connaîtrons les forces extérieures; ces dernières, par exemple les réactions sur les appuis, étant souvent inconnues, c'est encore au moyen des conditions d'équilibre que nous les trouverons.

Passons à *la détermination des conditions d'équilibre des forces extérieures.*

Si nous décomposons toutes les forces P agissant sur un corps selon 3 axes, x, y et z perpendiculaires entre eux, nous obtiendrons des composantes P_x, P_y et P_z; il faut pour que l'équilibre

existe, premièrement: que la somme algébrique de ces composantes sur chacun des trois axes soit nulle, donc

$$\Sigma P_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$
$$\Sigma P_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$
$$\Sigma P_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

En second lieu si l'on calcule les moments, nous remarquons que le moment de la force P pris par rapport à l'axe des z est donné par la somme des produits

$$yP_x + xP_y,$$

où x, y et z désignent les coordonnées du point d'application de la force P; pour que l'équilibre existe, il faut que la somme des moments relativement aux trois axes soit nulle, donc

$$\Sigma yP_x + \Sigma xP_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$
$$\Sigma zP_x + \Sigma xP_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$
$$\Sigma yP_z + \Sigma zP_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Nous prendrons toujours l'axe des y parallèle à la direction de la pesanteur, l'axe des x sera donc horizontal et nous le placerons dans la direction de l'axe de la construction; la plus grande partie des forces que nous aurons à considérer sera donc parallèle au plan xy et nous n'aurons guère à nous occuper que des équations 1) 2) et 4).

Nous désignerons par ΣX et ΣY la somme des *forces composantes moléculaires*, horizontales et verticales, agissant sur une coupe quelconque; si nous plaçons l'origine des coordonnées sur cette coupe et que nous conservions les notations ci-devant de P_x et P_y pour les composantes horizontales et verticales des forces *extérieures*, nous obtiendrons pour les conditions d'équilibre les relations:

$$\Sigma X = \Sigma P_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$
$$\Sigma Y = \Sigma P_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$
$$\Sigma Xy = \Sigma xP_y + \Sigma yP_x \quad . \quad . \quad 9)$$

Dans ces trois équations, les forces extérieures et leurs moments sont opposés aux forces moléculaires et à leurs moments; la valeur $\Sigma xP_y + \Sigma yP_x$ exprime le moment des forces extérieures pris relativement à la coupe considérée et nous la nommerons dans la suite *moment de flexion*; ΣP_x est la *poussée horizontale* et ΣP_y *l'effort tranchant.*

Pour les *ponts-poutres*, les réactions sur les appuis sont parallèles à la pesanteur; ici nous négligeons les petites forces horizontales qui résultent par exemple d'un changement de température produisant un frottement, la poussée horizontale ΣP_x devient nulle ainsi que le moment ΣyP_x, et les équations 7 à 9 se réduisent aux expressions:

$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$
$$\Sigma Y = \Sigma P_y \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$
$$\Sigma Xy = \Sigma xP_y \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

L'équation 10) montre que ΣXy est un couple dont le moment est indépendant de l'origine des coordonnées, où qu'il soit transporté; ΣXy ainsi que le moment de flexion $\Sigma x P_y$ est constant pour la coupe considérée.

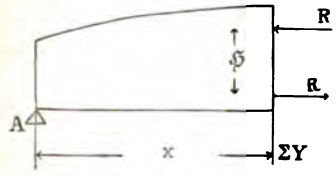
Nous nommons ΣXy le *moment de résistance* de la surface d'une coupe quelconque et ΣY la *résistance verticale;* ainsi que nous venons de le voir, ces deux valeurs sont pour des ponts-poutres en valeur numérique égales et de sens contraire au moment de flexion ou à l'effort tranchant; dans la suite, lorsqu'il sera question de la coupe d'un pont-poutres, nous désignerons le moment de flexion par $\mathfrak{M}$, l'effort tranchant par $\mathfrak{B}$; les équations 10) à 12) s'écriront alors

$$\Sigma X = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad 10^a)$$
$$\Sigma Y = \mathfrak{B} \quad . \ . \ . \ . \quad 11^a)$$
$$\Sigma Xy = \mathfrak{M} \quad . \ . \ . \ . \quad 12^a)$$

Nous désignerons par A, B, C . . . . ., les réactions sur les appuis résultant des forces extérieures, par p le poids par unité de longueur de la construction elle-même, par k celui de la surcharge et leur somme par q, les valeurs de p, k et q pouvant varier pour diverses coupes verticales.

5. M. W. Schwedler dans un article sur les ponts-poutres qui a paru en 1851 à Berlin dans la „*Zeitschrift für Bauwesen*", a introduit le premier sous la forme que nous venons de donner le moment de résistance ΣXy et la résistance verticale ΣY, en faisant observer une relation remarquable entre ces deux valeurs. — Considérons l'extrémité d'une poutre quelconque, plaçons l'origine des coordonnées sur l'appui en A; soit x l'abscisse d'une coupe quelconque, et la charge totale exprimée par la relation $q = F(x)$ dans laquelle comme au N° **4**, q indique la charge par unité de longueur pour la coupe x, ensorte que $\int_0^x q.\,dx$ désigne la charge répartie entre A et x; les valeurs ΣX, ΣY et ΣXy ont la signification indiquée au N° **4**, de même A indique la pression sur l'appui A. L'origine des coordonnées étant en A, nous aurons pour les conditions d'équilibre

Fig. 1.



$$\Sigma X = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 13)$$
$$\Sigma Y = A - \int_0^x q.\,dx \quad . \ . \ . \ . \quad 14)$$
$$\Sigma Xy = \int_0^x qx.\,dx + x\Sigma Y \quad . \ . \ . \quad 15)$$

Nous pourrons toujours choisir une abscisse a de façon que $A = \int_0^a q dx$, nous aurons d'après l'équation 14):

$$\Sigma Y = \int_x^a q dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

c'est-à-dire que la valeur ΣY est toujours égale aux poids répartis entre a et x; nous voyons que ΣY augmente à mesure qu'on se rapproche de l'appui et qu'il est nul pour l'abscisse a.

Différentiant les grandeurs ΣY et ΣXy par rapport à x dans les équations 14) et 15), on obtient

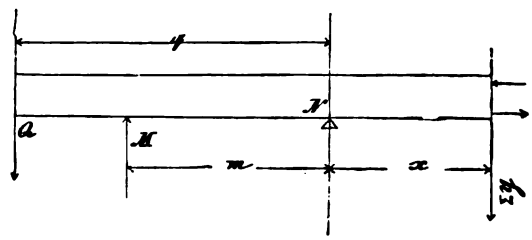
$$d\Sigma Y = - q dx$$
$$d\Sigma Xy = qx dx + \Sigma Y \,.\, dx + x d\Sigma Y$$

d'où résulte:

$$\frac{d\Sigma Xy}{dx} = \Sigma Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Figurons-nous l'appui N comme point intermédiaire d'une poutre continue et introduisons à gauche de l'origine des coor-

Fig. 2.



données la somme des charges Q et celles des pressions sur les appuis M avec leurs bras de levier respectifs q et m, les équations 13) à 15) prendront les formes:

$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13^a)$$

$$\Sigma Y = M + N - (Q + \int_0^x q dx) \quad . \quad . \quad . \quad 14^a)$$

$$\Sigma Xy = \int_0^x qx dx + x\Sigma Y + Mm - Qq \quad . \quad 15^a)$$

Choisissons encore une abscisse a de telle façon que $M + N - Q = \int_0^a q dx$, nous obtiendrons comme ci-devant

$$\Sigma Y = \int_x^a q \,.\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16^a)$$

c'est-à-dire que ΣY représente encore la charge répartie entre x et le point pour lequel $\Sigma Y = 0$.

En différentiant les équations 14^a) et 15^a) on verra que les valeurs $d\Sigma Y$ et $d\Sigma Xy$ sont identiques à celles obtenues par les équations 14) et 15), ce qui montre que la relation contenue

dans l'équation 17) est aussi bien applicable à des poutres continues qu'à celles qui reposent librement sur deux appuis.

6. La valeur numérique du moment de résistance ΣXy étant indépendante du choix de l'origine des coordonnées pour des ponts-poutres, on peut y substituer la valeur du moment de flexion obtenue facilement pour la même coupe au moyen des forces extérieures; d'après les équations 8), 11ª) et 16) on voit clairement que l'effort tranchant $\mathfrak{V}$ est toujours égal à la résistance verticale ΣY.

Si x désigne l'abscisse d'un élément pour une origine de coordonnées quelconques — et que $\mathfrak{M}$ représente le moment de flexion pour ce même élément en fonction de l'abscisse x, d'après l'équation 17) on aura toujours

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \mathfrak{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

En portant comme ordonnée une série de valeurs $\mathfrak{M}$ calculée pour un nombre suffisant de coupes x, on obtiendra ainsi une courbe dont la tangente trigonométrique sera proportionnelle à la valeur $\mathfrak{V}$ de l'effort tranchant pour la coupe considérée.

Pour $\mathfrak{V} = 0$, ce qui revient à $\Sigma Y = 0$, la tangente à la courbe des moments de flexion est horizontale, c'est-à-dire que pour ce point, qu'on peut facilement déterminer par les équations 14), 14ª) ou 16), la valeur de $\mathfrak{M}$ a atteint un maximum ou un minimum; il est donc facile, pour des ponts-poutres, de déterminer la plus grande valeur des moments de flexion.

Nous pourrons construire, d'une manière tout-à-fait analogue, une courbe pour l'effort tranchant; dans la planche II, nous avons construit au-dessus de l'axe des abscisses la courbe des $\mathfrak{M}$, au-dessous celle des $\mathfrak{V}$; — les valeurs *négatives* ont été portées par un rabattement du côté de l'axe des abscisses où sont déjà contenus les termes positifs, puisqu'il s'agit pour le moment des valeurs numériques de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{V}$.

7. Nommons R et R′, la somme des composantes positives et négatives des forces moléculaires agissant sur un élément, égales en valeur numérique et figurons-nous qu'elles agissent à leurs points d'application respectifs distants entre eux de la grandeur $\mathfrak{H}$ nous aurons d'après la théorie des couples:

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \mathfrak{H}R = \mathfrak{H}R' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Si dans les parties d'une tige soumises à des efforts de traction et de compression, on parvient à déterminer avec une approximation suffisante les points d'application des sommes des composantes horizontales de tension et de pression, on obtiendra directement par l'équation 19) au moyen du moment de flexion $\mathfrak{M}$, la valeur de la force horizontale R agissant dans la tige, en divisant cette valeur par le cosinus de l'inclinaison que la tige forme, avec l'horizon.

§ 3.

Etude de la résistance des corps prismatiques.

8. L'étude de la *résistance à l'extension et à la compression* repose sur l'observation, qu'une force de tension ou de compression agissant dans le sens longitudinal d'un corps, se répartit uniformément sur toute la surface de ce corps, de sorte qu'on a toujours la relation:

$$P = \mathfrak{A} w = \mathfrak{B} w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

dans laquelle P désigne la force agissante, w la section transversale du prisme, $\mathfrak{A}$ l'effort de tension, $\mathfrak{B}$ l'effort de pression par unité carrée.

(Nous entendrons par „effort de tension et de compression" les forces réparties sur une unité carrée.)

Si nous nommons P_a la traction et P_b la pression capable de rompre le corps (soit par traction, soit par écrasement), $\mathfrak{A}_o$ et $\mathfrak{B}_o$ les efforts de tension et de compression par unité carrée correspondante, nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= \mathfrak{A}_o\, w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ P_b &= \mathfrak{B}_o\, w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

L'expérience a montré que pour un même corps, $\mathfrak{A}_o$ et $\mathfrak{B}_o$ ont des valeurs assez constantes. En pratique on ne prend qu'une portion des valeurs de $\mathfrak{A}_o$ et $\mathfrak{B}_o$ comme effort à adopter pour l'extension ou la compression.

Remarque. Dans le second chapitre cette portion adoptée des valeurs de $\mathfrak{A}_o$ et $\mathfrak{B}_o$ est renfermée dans les coefficients pratiques.

9. Lorsqu'un corps prismatique ou cylindrique est soumis à un effort de traction longitudinale, il *s'allonge*, soumis à un effort de compression il se *raccourcit;* l'expérience a montré que cet allongement ou ce raccourcissement est proportionnel à la longueur du corps et à l'effort de tension ou de compression par unité carrée, ce qui s'exprime par la formule:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathfrak{A}}{E} = \frac{\mathfrak{B}}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

dans laquelle

l désigne la longueur primitive du prisme,

λ son allongement ou son raccourcissement,

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, comme ci-dessus, les efforts de traction et de compression par unité carrée,

E un coefficient dépendant de la nature du corps et pouvant avoir diverses valeurs pour la tension et la pression; on le nomme *coefficient* ou *module d'élasticité.*

Pour les efforts de traction ou de compression qui ne doivent pas être dépassés dans les constructions, le coefficient d'élasticité est constant pour chaque matière et dans les limites pratiques, il est à peu près le même pour la tension que pour la compression.

La table suivante II donne les valeurs de E en kilogrammes, lorsque dans la formule 22) l'effort de tension $\mathfrak{A}$ ou de compression $\mathfrak{B}$ est donné en kilogrammes par centimètre carré; l et λ doivent être exprimés dans la même unité, qui du reste peut être choisie à volonté.

Table II.

Pour bois	E = 100000	kilogr.	par	centim.	carré.
„ fer forgé . . .	E = 1'800000	„	„	„	„
„ fonte	E = 900000	„	„	„	„
„ acier fondu . .	E = 1'800000	„	„	„	„
„ acier trempé . .	E = 3'000000	„	„	„	„

Les expériences faites sur l'acier fondu ne permettent pas de fixer avec une grande certitude la valeur du coefficient d'élasticité, qui a été trouvé en partie très-faible, montrant un décroissement très rapide par une augmentation graduelle de charge et variant beaucoup avec la texture de la matière employée.

Le module d'élasticité E représente encore la force de tension, fictive il est vrai, qui serait capable de doubler la longueur d'un corps d'un centimètre carré de section.

Si l'on fait usage de la table II pour les coefficients d'élasticité, la table III montre les changements produits par des efforts de tension ou de compression s'opérant sur divers corps dans les limites de la pratique.

Table III.

Tension ou pression en kilogrammes par centimètre carré.	Allongement ou raccourcissement $\frac{\lambda}{l}$		
	Bois	Fer forgé	Fonte
100	$^1/_{1000}$	$^1/_{18000}$	$^1/_{9000}$
200	—	$^1/_{9000}$	$^1/_{4500}$
400	—	$^1/_{4500}$	$^1/_{2250}$
600	—	$^1/_{3000}$	$^1/_{1500}$
800	—	$^1/_{2250}$	$^1/_{1125}$
1000	—	$^1/_{1800}$	$^1/_{900}$
1200	—	$^1/_{1500}$	$^1/_{750}$
1400	—	$^1/_{1286}$	$^1/_{643}$
1600	—	$^1/_{1125}$	$^1/_{562}$

10. La loi qui ressort de cette table n'est pas rigoureusement exacte; l'expérience montre que non seulement en dehors, mais

même dans les chiffres admis en pratique, la valeur du module d'élasticité indiquée dans le tableau ne représente qu'une moyenne des résultats obtenus.

Les expériences de Hodgkinson sur *le fer forgé* donnent pour une charge de 1600 kilogr. par centimètre carré un coefficient d'élasticité

à l'extension E = 1'634000,
à la compression E = 1'968000,

moyenne E = 1'800000 introduite dans la table. — Pour de plus grandes charges, le module d'élasticité diminue rapidement; pour un effort de tension de 2400 kilogr. par centimètre carré, il n'est guère que le tiers de la valeur adoptée 1'800000; il en est de même, toutefois dans une proportion moins forte, du module d'élasticité observé dans la compression du fer forgé. Pour ces grandes charges et surtout près du point de rupture, le module d'élasticité varie très-notablement avec la qualité du fer; pour la tension, le point de rupture varie entre la proportion $\frac{\lambda}{l} = {}^1/_8$ à ${}^1/_{60}$; ${}^1/_8$ est pour du fer très-tenace, ${}^1/_{60}$ pour du fer cristallisé et mauvais.

Il faut de plus remarquer que pour ces fortes charges, le corps ne revient plus à sa dimension primitive lorsqu'on a supprimé la charge; il subit un *allongement* ou un *raccourcissement* qu'on appelle pour cette raison *permanent*, et qui se produit en général pour le fer forgé, si l'on dépasse la charge de 1600 kilogr. par centimètre carré; on se rend compte ainsi de la *limite d'élasticité;* plusieurs constructeurs ont pris comme base de leurs chiffres pour charges permises en pratique les charges correspondant à la limite d'élasticité; cela demande une observation minutieuse et délicate du changement de forme dépendant de la qualité de la matière; il faudrait donc pour chaque cas particulier faire de nouvelles observations, ce qui aurait bien ses difficultés; en outre il est certain que le point de rupture est mieux précisé et qu'il est plus facile à observer que le moment où la limite d'élasticité est atteinte; du reste, les variations dans le point de rupture pour les différentes sortes de fers sont moins grandes que pour la limite d'élasticité.

D'après les motifs énoncés, il nous a semblé naturel de baser les charges permises pour la pratique sur la charge de rupture, ainsi que nous l'avons fait dans le N° **8**; nous ne donnons pas de recherches sur les limites d'élasticité, il nous suffit de savoir que les charges que nous admettrons dans nos calculs, se trouvent suffisamment éloignées de cette limite et que le module d'élasticité pour le fer forgé correspondant à l'extensionet à la compression, est à peu près le même, en moyenne 1'800000 kilogr.

Table IV.

Module d'élasticité de la fonte à l'extension.

charge en kilog. par centim. carré.	Allongement par mètre courant.		Module d'élasticité par centimètre carré.
	total.	permanent.	
Kilo	M.	Mm.	Kilo
73,955	0,000075	0	985567
111,005	0,000114	0,00183	977467
148,142	0,000155	0,00454	956369
220,630	0,000239	0,00891	923100
296,206	0,000326	0,01460	909650
370,282	0,000416	0,02200	889255
444,336	0,000551	0,03100	870385
517,436	0,000611	0,04300	846490
592,450	0,000715	0,05590	828180
666,508	0,000828	0,07030	804407
740,555	0,000946	0,08840	782785
814,619	0,001068	0,10880	762420
886,672	0,001206	0,13390	754117
962,787	0,001392	0,17460	693111
1039,621	0,001548	0,20070	672313

Table IV[a].

Module d'élasticité de la fonte à la compression.

charge en kilog. par centim. carré.	Raccourcissement par mètre courant.		Module d'élasticité par centimètre carré.
	total.	permanent.	
Kilo	M.	Mm.	Kilo
145,105	0,00015605	0,003914	929278
290,209	0,00032396	0,01882	898608
439,315	0,00049784	0,03331	874407
580,419	0,00065625	0,05371	884580
725,525	0,00082808	0,07053	876147
870,644	0,00100253	0,09053	868443
1015,535	0,0011795	0,11700	861172
1160,840	0,0013606	0,14258	853178
1305,495	0,0015411	0,17085	847426
1451,050	0,0017175	0,20685	844839
1741,256	0,0020786	0,36810	837678
2032,171	0,0024733	0,45810	821648
2326,661	0,0029432	0,50768	788718

11. Des efforts analogues se produisent pour les *fontes*, seulement le module d'élasticité varie encore davantage et décroît plus rapidement pour une augmentation de charge; il n'est guère possible de donner une valeur certaine pour la limite d'élasticité, car les fontes subissent à peu près sous chaque charge un changement permanent.

Nous donnons ci-devant les tables IV et IV^a, page 12, résultant des recherches de **M. Eaton Hodgkinson.**

Si l'on prend les moyennes de ces modules d'élasticité jusqu'aux charges de 592^k ou de 1740 kilog, on obtient

à l'extension:

$$E = 909607^k \text{ par centimètre carré,}$$

à la compression:

$$E = 880476^k \quad \text{"}$$

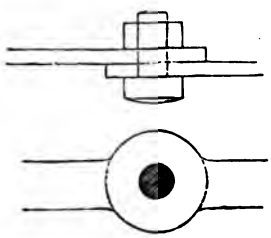
en moyenne:

$$E = 895042^k \quad \text{"}$$

Dans notre table II nous avons pris 900000^k.

12. La *résistance au cisaillement* se produit, lorsque deux lamelles d'un corps tendent à se mouvoir le long d'une surface commune dans des directions différentes. Si le corps était libre, il se produirait un mouvement de rotation, mais si celui-ci est empêché par d'autres forces, il en résulte le long de la surface commune une tendance des deux corps à glisser l'un sur l'autre.

Fig. 3.



Prenons pour exemple un boulon réunissant deux lamelles (Fig. 3); la surface du boulon comprise dans le plan de contact des deux lamelles est soumise à un effort de cisaillement, il en est exactement de même des rivets de toutes les constructions.

Figurons-nous d'une manière générale, dans un corps soumis à l'action d'une force qui agit dans une direction indéterminée, une surface formant un angle avec la direction de cette force, nous décomposerons cette dernière en deux, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à la surface; la composante perpendiculaire agira comme tension ou comme pression sur la surface et se calculera d'après la formule 20. La composante horizontale parallèle à la surface soumet le corps à un effort de cisaillement; elle engendrera dans le corps des forces moléculaires que nous nommerons les *forces rasantes*, aussi dites *forces* de *cisaillement*; celles-ci se répartissent uniformément sur la surface, de manière qu'on peut écrire:

$$P = \mathfrak{S} w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

P étant la force qui agit le long de la surface, w la coupe et $\mathfrak{S}$ *l'effort rasant*, c'est-à-dire la force rasante par unité carrée.

Si nous nommons P_o la force capable de produire la rupture et $\mathfrak{C}_o$ l'effort rasant correspondant, nous pourrons écrire:

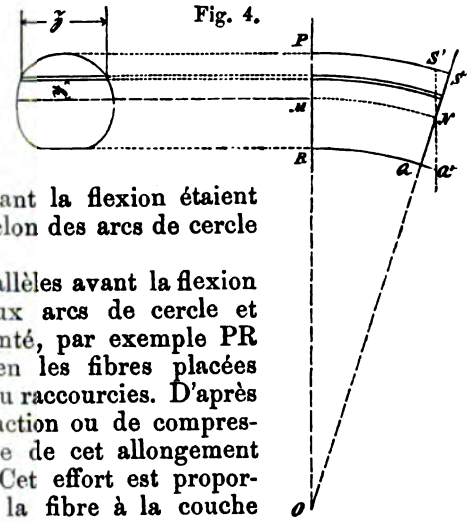
$$P_o = \mathfrak{C}_o \, w. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

La résistance au cisaillement pour le fer forgé a été trouvée en général de même valeur que celle relative à un effort de traction, pourvu toutefois que la surface soit soumise à un cisaillement uniformément réparti, ce qui n'arrive pas toujours pour les rivets et pour les boulons; nous ferons connaître dans la suite ces particularités, ainsi que le frottement des boulons.

La résistance au cisaillement varie aussi avec la texture de la matière; on a remarqué, par exemple, que la tôle offre plus de résistance dans le sens perpendiculaire que dans le sens parallèle au laminage. Pour le bois, cette différence est très-grande, à cause de l'arrangement des fibres, car on sait la facilité avec laquelle il se laisse séparer dans le sens longitudinal comparativement à sa ténacité contre un cisaillement oblique.

13. Un prisme oppose *une résistance transversale*, lorsqu'il est sollicité par une force agissant perpendiculairement à sa longueur; le prisme se courbe, les fibres longitudinales concaves se raccourcissent, les fibres convexes s'allongent de sorte que, ces effets opposés allant en décroissant de l'extérieur à l'intérieur, il doit se trouver une couche dont les fibres ne sont ni allongées ni raccourcies, qui restent de longueur invariable et qu'on nomme *couche des fibres invariables* ou *couche neutre*. On obtient la valeur de cet allongement, ou de ce raccourcissement, en faisant l'hypothèse que les fibres qui, avant la flexion, se trouvaient comprises entre deux plans perpendiculaires à la couche neutre, le sont encore après la flexion. Cette hypothèse, principe fondamental, peut être regardée comme exacte, puisque les résultats obtenus en réalité coïncident avec ceux qui découlent de ce principe.

Fig. 4.



Considérons un élément d'une poutre soumise à la flexion, (fig. 4) toutes les fibres longitudinales qui avant la flexion étaient droites, auront été fléchies selon des arcs de cercle à centre commun.

Les lignes droites et parallèles avant la flexion deviennent des normales aux arcs de cercle et deux normales prises à volonté, par exemple PR et SQ montrent de combien les fibres placées entre elles ont été allongées ou raccourcies. D'après la formule 22) l'effort de traction ou de compression est donné par la mesure de cet allongement ou de ce raccourcissement. Cet effort est proportionnel à la distance y de la fibre à la couche

neutre; si nous nommons $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ les efforts de traction et de compression des fibres extérieures, a et b la distance de ces fibres à la couche neutre, l'effort de tension $\mathfrak{A}_y$ ou de compression $\mathfrak{B}_y$ d'une coupe zdy sera d'après l'équation 20)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_y &= \frac{\mathfrak{A}}{a} y \,.\, z\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \mathfrak{B}_y &= \frac{\mathfrak{B}}{b} y \,.\, z\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \; 25)$$

et la somme des efforts de traction et de compression:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X_a &= \frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a y \,.\, z\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \Sigma X_b &= \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b y \,.\, z\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \; 26)$$

Pour tous les ponts-poutres, d'après l'équation 10)

$$\Sigma X_a - \Sigma X_b = \Sigma X = o$$

donc:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a}\int_o^a y\; z\,dy - \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b y\; z\,dy = o \quad . \; . \quad 27)$$

En tant que la valeur de E est égale pour la tension et la pression, on aura aussi $\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\mathfrak{B}}{b}$ et l'on peut traduire l'équation 27) en disant que:

la ligne des fibres invariables passe par le centre de gravité de la section transversale.

Nous avons, dans le N° 7, désigné par R la somme des composantes horizontales positives égale à celle des composantes négatives, c'est-à-dire

$$\Sigma X_a = \Sigma X_b = R$$

Remplaçant ΣX_a et ΣX_b par les valeurs que nous venons de trouver, nous aurons pour R les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\mathfrak{A}}{b}\int_o^a y \,.\, z\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ R &= \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_o^b y \,.\, z\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \; 28)$$

Avant de pouvoir donner une valeur numérique à ces termes, il faut d'abord trouver la position de la couche neutre ou, en d'autres mots, il faut déterminer le centre de gravité de la section.

Comme nous l'avons vu, les forces ΣX_a et ΣX_b forment un couple que nous avons nommé moment de résistance ΣXy de la section, lequel en valeur numérique est égal au moment de flexion $\mathfrak{M}$ des forces extérieures.

Afin d'obtenir pour ΣXy une relation simple, nous transporterons l'origine des coordonnées au centre de gravité de la section et nous formerons la somme des moments

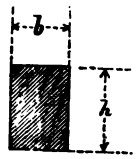
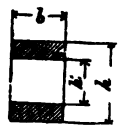
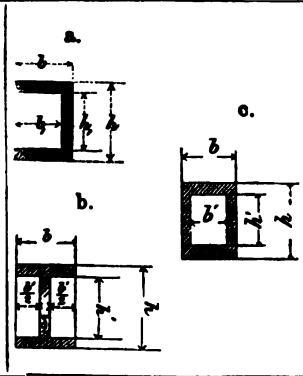
pour la tension $\frac{\mathfrak{A}}{a}\int_0^a zy^2 \cdot dy$

pour la pression $\frac{\mathfrak{B}}{b}\int_0^b zy^2 dy$

d'où l'on tire:

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\int_0^a zy^2 \cdot dy + \frac{\mathfrak{B}}{b}\int_0^b zy^2 dy \quad . \quad . \quad 29)$$

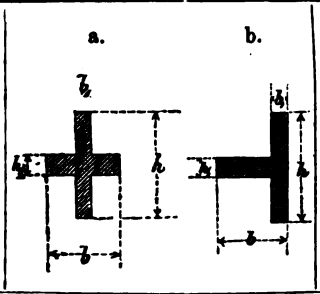
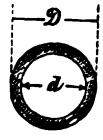
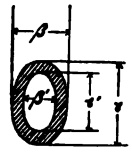
Table V.

Nr. de la Fig.	Forme de la surface.	Moment d'inertie Θ.	$\frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{b}$
5		$\frac{1}{12} bh^3$	$\frac{1}{6} bh^2$
6		$\frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3)$	$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{6 \cdot h}$
7		$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3)$ ou $\frac{1}{12}\left[bh^3 - (b-\delta)h_1^3\right]$	$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6 \cdot h}$ ou $\frac{bh^3 - (b-\delta) h_1^3}{6 \cdot h}$

Comme en mécanique, nous nommerons la valeur $\int zy^2\,dy$ le *moment d'inertie* de la surface zy; il ne dépend que de la forme de la section. Si, comme ci-dessus, nous pouvons prendre $\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\mathfrak{B}}{b}$ (égalité numérique des coefficients d'élasticité à la traction et à la compression), on pourra additionner immédiatement les moments d'inertie des surfaces allongées et comprimées et nous obtiendrons le *moment d'inertie Θ de la surface entière* exprimée par la relation:

$$\Theta = \int_o^a y^2 . z\,dy + \int_o^b y^2 z\,dy \quad . \quad . \quad 30)$$

Tabelle V. (Suite.)

Nr. de la Fig.	Forme de la surface.	Moment d'inertie Θ.	$\frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{b}$
8		$\frac{b_1 h^3 + (b - b_1) h_1^3}{12}$	$\frac{b_1 h^3 + (b - b_1) h_1^3}{6 \cdot h}$
9		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$
10		$\frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$
11		$\frac{\pi}{64} (\alpha^3 \beta - \alpha_1^3 \beta_1)$	$\frac{\pi (\alpha^3 \beta - \alpha_1^3 \beta_1}{32\ \alpha}$

Il résulte des équations 29) et 30):

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{b}\Theta \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

Combinant l'équation 31) avec l'équation 19) du N° **7** et plaçant pour R sa valeur tirée de l'équation 28), on obtient pour la hauteur $\mathfrak{H}$ définie au N° **7**:

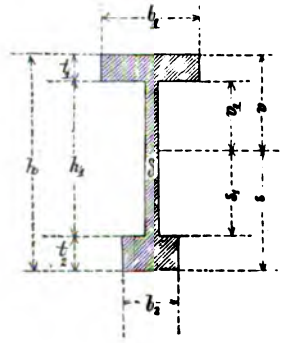
$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^a yz\,dy} = \frac{\Theta}{\int_0^b yz\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

Les intégrales de l'équation 32) indiquent les *moments des sections soumises à des efforts de* ***traction*** (ou de compression) pris par rapport à la ligne des fibres invariables, mais comme cette dernière passe par le centre de gravité de la section, l'identité des deux moments se trouve expliquée, d'après la définition même du centre de gravité; quant aux sections rectilignes, le calcul élémentaire suffit pour la détermination de ces moments (relatifs à la ligne des fibres invariables).

14. Le moment de résistance d'une surface est, d'après ce que nous avons vu, directement proportionnel au moment d'inertie; nous donnons dans la table V les moments d'inertie Θ, ainsi que les rapports $\frac{\Theta}{a}$ et $\frac{\Theta}{b}$ pour les coupes qu'on rencontre le plus fréquemment en pratique.

Dans les figures suivantes, 12 et 13, nous supposons la partie supérieure soumise à un effort de traction et la partie inférieure à un effort de compression, comme cela a lieu pour une poutre reposant librement sur deux appuis; si le cas contraire arrivait (ce qui revient à tourner la figure) Θ resterait le même, mais $\frac{\Theta}{a}$ et $\frac{\Theta}{b}$ changeraient réciproquement de valeur.

Fig. 12.



$$s = \frac{b_2 t_2 \cdot \frac{t_2}{2} + h_2 \delta \cdot \frac{h_1 + 2t_2}{2} + b_1 t_1 \frac{t_1 + 2(h_1 + t_2)}{2}}{b_1 t_1 + b_2 t_2 + h_1 \delta}$$

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1 v^3 - (b_1 - \delta) v_1^3 + b_2 s^3 - (b_2 - \delta) s_1^3\right]$$

$$\frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{s}; \quad \frac{\Theta}{b} = \frac{\Theta}{h - s}$$

Fig. 13a.

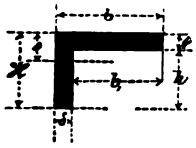


Fig. 13b.

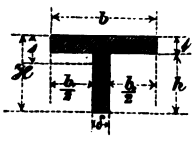
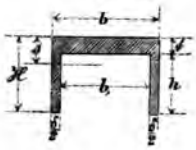


Fig. 13c.

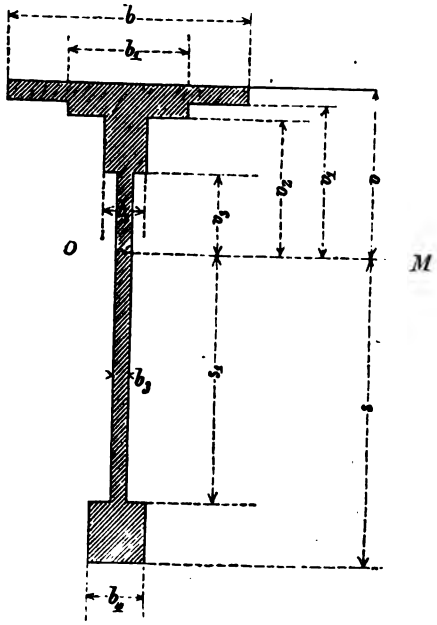


$$s = \frac{b_1 t^2 + \delta H^2}{2(b_1 t + \delta H)}$$

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1\left(s^3 - (s-t)^3\right) + \delta\left(s^3 + (H-s)^3\right)\right]$$

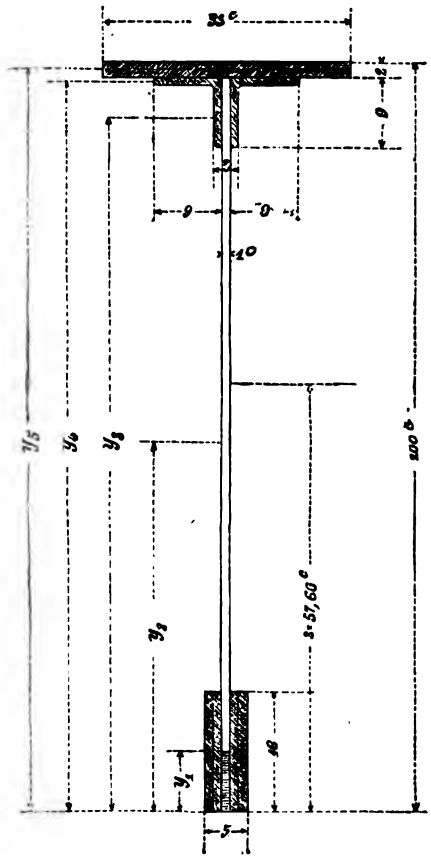
$$\frac{\Theta}{b} = \frac{\Theta}{s}; \quad \frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{H - s}$$

Fig. 14.



Comme exemple, nous voulons indiquer la manière de trouver le moment d'inertie d'une coupe un peu compliquée (fig. 14). Nous supposons la ligne OM passant par le centre de gravité déjà trouvé. Nous obtiendrons le moment d'inertie total, en additionnant celui de la partie supérieure à celui de la partie inférieure dont la ligne OM forme la limite. Pour la partie supérieure le

Fig. 15.



moment d'inertie se compose du moment du rectangle b + v, soit le moment $\int_0^v by^2 dy = \frac{1}{3} bv^3$, moins les moments d'inertie des espaces vides d'où resulte

$$\Theta_v = \frac{1}{3}\left(bv^3 - (b - b_1)\,v_1^3 - (b_1 - b_2)\,v_2^3 - (b_2 - b_3)\,v_3^3\right) \text{ I.}$$

et pour la partie inférieure

$$\Theta_s = \frac{1}{3}\left(b_4 s^3 - (b_4 - b_3)\, s_1^3\right) \quad . \quad \text{II.}$$

et pour le moment d'inertie de la surface totale

$$\Theta = \Theta_v + \Theta_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Prenons pour cette surface un exemple numérique, supposons la hauteur $H = v + s = 100$ centimètres, l'épaisseur de la paroi verticale $b_3 = 1$ centimètre, la nervure inférieure (y compris la paroi verticale) d'une largeur $b_4 = 5$ centimètres et d'une hauteur de 16 centimètres; la nervure supérieure composée de deux cornières et de deux tables horizontales, d'une surface totale = 100 centim. carrés, à savoir deux cornières, chacune d'une longueur d'aile de 9 centimètres et d'une épaisseur de 1 centimètre, chacune 17, donc ensemble 34 centim. carrés, tandis que la table horizontale a 33 centimètres de largeur et 2 centimètres d'épaisseur; la nervure inférieure forme donc les $^4/_5$ de la coupe de la nervure supérieure. Ces dimensions sont indiquées dans la fig. 15; il s'agit de déterminer d'abord le centre de gravité de la surface totale; à cet effet les distances y des centres de gravité à l'arête inférieure sont, ainsi que la distance s de celui de la coupe entière, indiquées dans la figure.

D'après la définition du centre de gravité, on aura:

$$\begin{aligned} s \times (\text{surface totale}) &= 33.\ 2.\ y_5 + 18.\ 1.\ y_4 \\ &+ \ 8.\ 2.\ y_3 + 98.\ 1.\ y_2 \\ &+ 16.\ 4.\ y_1 \end{aligned}$$

Calculant la surface totale et remplaçant les valeurs y par les nombres correspondants, on obtiendra:

$$s = \frac{15107}{263} = 57{,}_{66} \text{ centimètres,}$$

d'où l'on déduira pour les valeurs v et s de la fig. 15:

$$\begin{aligned} v &= 42{,}_{33} \text{ C.} \\ v_1 &= 40{,}_{33} \\ v_2 &= 39{,}_{33} \\ v_3 &= 31{,}_{33} \\ s &= 57{,}_{66} \\ s_1 &= 41{,}_{66} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} b &= 33 \text{ C.} \\ b_1 &= 19 \\ b_2 &= 3 \\ b_3 &= 1 \\ b_4 &= 5 \end{aligned}$$

et en remplaçant ces valeurs dans les équations I—III :

$$\Theta = \frac{1}{3}\left(\begin{matrix}33.\ 42{,}33^3 - 14.\ 40{,}33^3 - 16.\ 39{,}33^3 - 2.\ 31{,}33^3) \\ + 5.\ 57{,}66^3 - 4.\ 41{,}66\end{matrix}\right)$$

d'où

$$\Theta = 398113 \text{ centimètres}^4.$$

15. En pratique, il arrivera ordinairement que cette détermination du moment d'inertie pourra se faire beaucoup plus rapidement et avec une approximation suffisante, ainsi que nous allons le montrer pour une coupe à nervures rectangulaires.

Nommons dans la fig. 16, a_0 et b_0 les distances des centres de gravité des deux nervures au centre de gravité commun de la surface totale. La figure indique la signification de chaque lettre.

Le moment d'inertie de cette section sera

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1\,(a^3 - [a - t_1]^3) + b_2\,(b^3 - [b - t_2]^3)\right]$$

Si l'on substitue dans cette équation

$$a_0 = a - \frac{t_1}{2} \qquad b_0 = b - \frac{t_2}{2}$$

$$\Omega_a = t_1 b_1 \qquad \Omega_b = t_2 b_2$$

de façon que Ω_a et Ω_b expriment les surfaces des deux nervures, on aura

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[\Omega_a\,(3a_0^2 + \frac{t_1^2}{4}) + \Omega_b\,(3b_0^2 + \frac{t_2^2}{4})\right]$$

Lorsque la nervure est d'une hauteur minime par rapport à la hauteur de la poutre, on pourra négliger $\frac{t_1^2}{4}$ et $\frac{t_2^2}{4}$ relativement à $3a_0^2$ soit $3b_0^2$ et l'on obtient avec une approximation suffisante

$$\Theta = \Omega_a\ a_0^{\ 2} + \Omega_b\ b_0^{\ 2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

Si l'on observe encore, d'après la définition du centre de gravité, que $\Omega_a\ a_0 + \Omega_b\ b_0$ et que $a_0 + b_0 = \mathfrak{H}_0$ on aura

$$\Theta = \Omega_a\ .\ a_0\ \mathfrak{H}_0 = \Omega_b\ .\ b_0\ \mathfrak{H}_0 \quad . \quad . \quad . \quad 34)$$

et pour des poutres à nervures égales

$$\Theta = \frac{1}{2}\Omega\ .\ \mathfrak{H}_0^{\,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34^a)$$

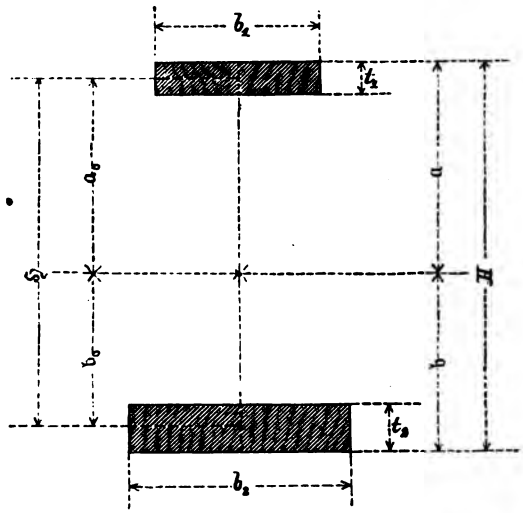
Si dans la formule 31) on introduit la valeur approximative pour Θ, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{a_0}{a}\ .\ \mathfrak{A}\ .\ \Omega_a\ .\ \mathfrak{H}_0 \\ \mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{b_0}{b}\ .\ \mathfrak{B}\ .\ \Omega_b\ .\ \mathfrak{H}_0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 35)$$

où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ indiquent les efforts de traction et de compression des fibres les plus éloignées, situées aux distances a et b de la fibre riable.

Les équations 35) auraient pu être obtenues directement, si l'on s'était figuré la pression et la traction concentrées chacune au centre de gravité des nervures respectives (voir l'équation 19); en recherchant la différence qui peut exister entre les centres de gravité et les points d'application des résultantes des efforts de traction et de compression, on peut se faire une idée bien nette de la légère influence qui se produit, lorsqu'on néglige les valeurs $\frac{t_1^2}{4}$ et $\frac{t_2^2}{4}$.

Fig. 16.



Tant qu'il sera permis de supposer les forces agissant sur une nervure comme concentrées au centre de gravité, la forme de la nervure n'aura pas d'influence et les équations 34) à 35) peuvent être appliquées à toutes espèces de coupes pour autant que les hauteurs de nervure seront assez petites par rapport à la hauteur totale de la poutre; il est évident que ces équations sont rigoureusement exactes, lorsque, par un moyen quelconque, les points d'application des efforts de traction et de compression ont été déterminés directement.

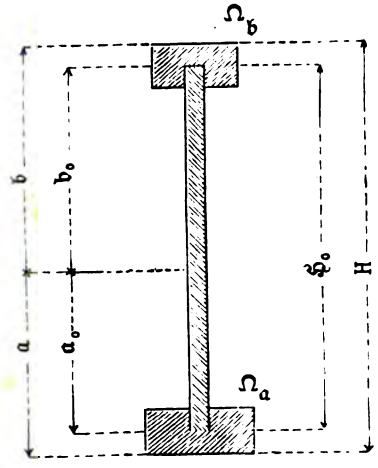
16. En faisant les mêmes suppositions que plus haut, considérons une *poutre à paroi verticale pleine*; nous obtiendrons son moment d'inertie, en ajoutant aux moments d'inertie des deux nervures ceux des parties de la paroi verticale soumises à des efforts de traction et de compression; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \Omega_a\, a_0^{\,2} + \Omega_b\, b_0^{\,2} + \frac{1}{3}\delta \,.\, a_0^{\,3} + \frac{1}{3}\delta b_0^{\,3} \\ \Theta &= a_0^{\,2}\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta a_0)\, b_0^{\,2}\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 36)$$

Pour plus de simplicité nous supposons la paroi verticale s'étendant jusqu'aux centres de gravité des nervures, ce qu'on peut admettre ordinairement en pratique; (on pourra, s'il est nécessaire, faire entrer dans le calcul la partie de la paroi verticale qui pourrait s'étendre au delà du centre de gravité, en ajoutant cette surface à celle de la nervure).

Si les sections des nervures sont égales, on aura $b_0 = a_0 = \frac{\mathfrak{H}_0}{2}$ et

Fig. 17.



$$\Theta = \frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{2}\,(\Omega + \frac{1}{6}\,\delta\mathfrak{H}_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

On voit donc que, pour le calcul de la paroi verticale et pour des poutres à nervures égales, il suffit d'ajouter le $^1/_6$ *de la surface de la paroi verticale* à celle de chacune des nervures et d'écrire ensuite le moment d'inertie pour une poutre vide (c'est-à-dire sans paroi verticale).

Pour des poutres à nervures inégales, il faudra avoir recours à l'équation 36); d'après la définition de la ligne des fibres invariables, on aura toujours:

$$a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{2}\,\delta a_0) = b_0\,(\Omega_b + \frac{1}{2}\,\delta b_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Soustrayant dans le premier membre $\frac{1}{6}\delta a_0^2$ et dans le second $\frac{1}{6}\delta b_0^2$ et admettant que la différence de ces deux valeurs soustraites puisse être négligée comparativement à Θ, on obtient:

$$a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta a_0) = b_0\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\delta b_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Cette dernière équation remplacée dans l'équation 36) donne la formule approximative pour la coupe qu'indique la fig. 17.

$$\Theta = \mathfrak{H}_0 a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta a_0) = \mathfrak{H}_0 b_0\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\delta b_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38)$$

et d'après l'équation 29)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\mathfrak{H}_0 a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta a_0) = \frac{\mathfrak{A}}{a}\mathfrak{H}_0 b_0\,(\Omega_b + \frac{1}{3}\delta b_0) \\ \mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{B}}{b}\mathfrak{H}_0 b_0\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta b_0) = \frac{\mathfrak{B}}{b}\mathfrak{H}_0 a_0\,(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta a_0) \end{aligned}\right\} \quad 39)$$

Nous allons montrer, par un exemple numérique, l'application de la formule 38) ainsi que son degré d'exactitude. Nous supposerons que dans la fig. 18 le centre de gravité soit connu; d'après le N° **14**, nous savons qu'il est situé à $42{,}_{33}$ centimètres de l'arête supérieure de la nervure supérieure; ici comme plus haut, nous ne tiendrons pas compte de l'affaiblissement produit par les logements des rivets, etc. Nous supposerons que le point d'application de la pression soit immédiatement au-dessous des tables horizontales supérieures, celui de la tension au-dessous du milieu de la nervure inférieure, et nous aurons:

$$\begin{aligned} b_0 &= 40{,}_{33} \\ a_0 &= 49{,}_{66} \\ \mathfrak{H}_0 &= 90{,}_{0}{}^{c} \end{aligned}$$

de plus

$$\Omega_a + \frac{1}{3}\delta a_0 = 72 + \frac{49{,}_{66}}{3} = 88{,}_{55}$$

$$\Omega_b + \frac{1}{3}\delta b_0 = 100 + \frac{40{,}_{33}}{3} = 113{,}_{44}$$

d'où résulte

$$\Theta = 90 \times 88{,}_{55} \times 48{,}_{66} = 395765{,}_{370}$$

ou

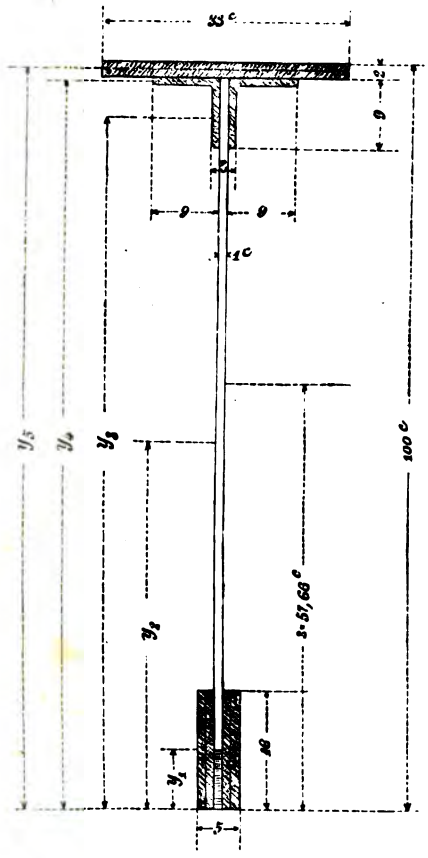
$$\Theta = 90 \times 113{,}_{44} \times 40{,}_{33} = 411753{,}_{168}$$

prenant la moyenne $\Theta = 403759{,}_{269}$

La comparaison avec le résultat exact obtenu dans le N° **14** montre une différence d'environ 1 pour cent, laquelle en pratique est ordinairement tolérable. Nous avons choisi à dessin cet exemple qui nous fournit un cas des plus défavorables, car d'un côté une nervure est d'une hauteur relativement considérable et en outre les sections sont très-inégales; en pratique, les surfaces des nervures

sont généralement peu différentes et surtout la hauteur est faible comparativement à la hauteur totale de la poutre et l'inexactitude disparaîtra.

Fig. 18.



17. L'équation 32) nous a permis de déterminer $\mathfrak{H}$, distance des points d'application des forces de traction et de compression moléculaires au moyen du moment d'inertie; on peut inversement déterminer $\mathfrak{H}$ graphiquement et déduire ainsi la valeur du moment d'inertie Θ, donc celle du moment de résistance ΣXy de la surface.

Afin d'obtenir graphiquement $\mathfrak{H}$, on déterminera d'après l'équation 25) pour chaque ordonnée y, la valeur $\frac{zy}{a}$ proportionnelle à la force A_y, ou à B_y, qui agit sur l'élément de largeur z et est situé à la distance y de la ligne des fibres invariables, ainsi que nous

l'avons fait dans la fig. 19; on portera ensuite cette valeur comme ordonnée parallèlement à l'axe des z; on joindra les extrémités de ces ordonnées par une ligne qui peut être droite ou courbe, cette ligne circonscrira une surface (indiquée par des hachures) qui représente la force R, c'est-à-dire qui est égale à la somme de toutes les tensions (ou pressions) qui agissent sur les nervures. Il résulte évidemment du N° **7** que ces deux surfaces hachées des deux côtés du centre de gravité doivent être égales. La distance entre les centres de gravité des deux surfaces hachées donnera la valeur $\mathfrak{H}$ cherchée et l'on obtiendra enfin d'après l'équation 19)

$$\Sigma Xy = \mathfrak{H}R$$

où $\mathfrak{H}$ et R sont déterminés graphiquement. On peut déterminer

Fig. 19.

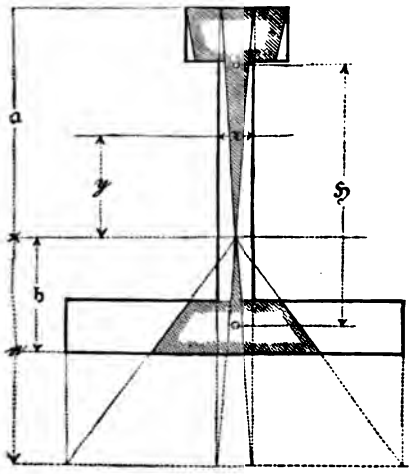
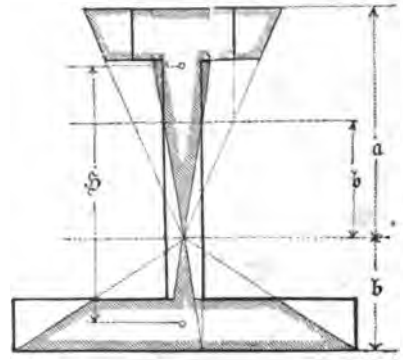


Fig. 19ª.



d'une manière analogue ΣXy (fig. 19ª), en prenant pour unité la tension ou la pression agissant sur la nervure inférieure.

On obtiendra le moment d'inertie Θ, en divisant ΣXy par $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$ ou $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$ et la valeur de $\frac{\Theta}{\mathfrak{a}}$, en multipliant l'une des surfaces hachées par $\mathfrak{H}$.

Dans la planche VIII, nous avons déterminé graphiquement le moment d'inertie du profil du rail de la métropole Railway à Londres, en supposant que le champignon soit soumis à un effort de traction ou à un effort de compression.

18. Les mêmes considérations qui nous ont appris à déterminer la valeur des résistances, nous permettent encore d'obtenir, dans chaque cas, la forme de la ligne des fibres invariables qu'on

nomme *courbe élastique* ou simplement *élastique*. Si nous reprenons la fig. 4 et que nous nommions $OM = \varrho$ le rayon de courbure de la ligne des fibres invariables ou fibres neutres de l'élément considéré, dl la longueur de cet élément, $d\lambda$ l'allongement de la fibre extérieure la plus fatiguée, nous voyons immédiatement d'après la fig. 4 que:

$$\varrho : a = dl : d\lambda$$

mais d'après l'équation 22) $\mathfrak{A} = \frac{d\lambda}{dl} E$

et d'après l'équation 31) $\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\Sigma Xy}{\Theta}$

d'où: $$\Sigma Xy = \frac{\Theta E}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40)$$

D'après la géométrie analytique, si nous exprimons la valeur du rayon de courbure ϱ en fonction des coordonnées de la courbe elle-même:

$$\varrho = \frac{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et si nous remarquons que pour de faibles courbures, comme celles qui nous occupent ici, $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$ peut être négligé, puisqu'il est toujours très-petit relativement à l'unité, nous obtiendrons d'après cette équation: $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$

et enfin d'après équation 40):

$$\frac{d^2y}{dx^2} E\Theta = \Sigma Xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41)$$

ce qui est *l'équation fondamentale de la ligne élastique.*

Dès que nous pourrons intégrer deux fois la valeur $\frac{\Sigma Xy}{E\Theta}$, nous aurons obtenu la forme de la ligne des fibres invariables.

Le calcul sera assez simple, lorsque le moment d'inertie Θ sera constant pour toute la longueur du prisme.

19. Prenons un exemple simple, pour montrer l'application de cette équation.

Soit une poutre de section constante, reposant librement sur deux appuis et chargée uniformément d'un poids q.

Nous prendrons l'origine des coordonnées en A, et nous aurons:

$$A = B = \frac{ql}{2}$$

d'après l'équation 14):

$$\Sigma Y = A - qx = \left(\frac{l}{2} - x\right) q$$

d'après l'équation 15):

$$\Sigma Xy = \frac{qx^2}{2} + x\Sigma Y = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

donc d'après l'équation 22):

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Intégrant:

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \text{Const.}$$

Pour déterminer la constante, remarquons que pour $x = \frac{l}{2}$, le quotient $\frac{dy}{dx} = o$, d'où

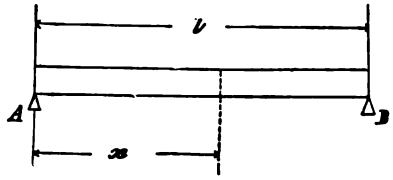
$$\text{Const.} = -\frac{q}{2}\frac{l^3}{12}$$

Substituant cette valeur et intégrant une seconde fois

$$E\Theta \,.\, y = \frac{24}{q}(2lx^3 - l^3x - x^4)$$

La constante est nulle, car pour $x = o$, on doit aussi avoir $y = o$.

Fig. 20.



Nous avons donc obtenu pour le cas présent l'équation de la ligne élastique et *nous trouvons comme inflexion maximum au milieu de la poutre*:

$$f = -\frac{5}{384}\frac{ql^4}{E\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad 42)$$

Si Θ variait proportionnellement à ΣXy, le rayon de courbure serait constant et égal à

$$\varrho = \frac{\Theta E}{\Sigma Xy};$$

Si donc la poutre avait eu en son milieu la coupe indiquée ci-dessus et qu'elle eût diminué jusqu'aux extrémités, on aurait obtenu

$$\varrho = \frac{\Theta E \,.\, 8}{ql^2}$$

et l'on aurait pour l'inflexion d'après les propriétés du cercle

$$f_1 = \frac{1}{64}\frac{ql^4}{E\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43)$$

Cette équation 43) donne une inflexion f_1 égale aux $^6/_5$ de celle fournie par l'équation 42) pour une poutre de section constante.

20. La position de la ligne des fibres neutres pour *une poutre continue*, se détermine d'une manière analogue à celle employée dans le Nr. **19.** on n'aura qu'à écrire l'équation 41) pour chaque travée et à intégrer deux fois. Les réactions sur les appuis ne peuvent toutefois être déterminées directement comme pour le cas d'une poutre qui repose librement sur deux appuis, les relations d'équilibre entre les forces extérieures et les réactions sur les appuis se réduisant aux équations 2 et 4 dans lesquelles ne doivent entrer que deux inconnues.

Les réactions sur les appuis jusqu'ici encore inconnues, se déterminent au moyen de l'équation de la ligne élastique.

Considérons une poutre continue sur n ouvertures et introduisons outre les réactions sur les appuis, les angles que fait l'élastique avec l'horizon sur les appuis, on aura comme inconnues:

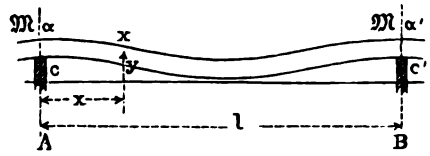
Réactions sur les appuis	n + 1
Angles de tangence	n + 1
2 Constantes par travée qui résultent de la double intégration	2 n
	4 n + 2

Pour déterminer ces inconnues, on a les relations suivantes: La ligne d'inflexion pour chaque travée doit passer sur les deux appuis et doit former avec l'horizon les angles indiqués ci dessus; on a donc pour chaque travée 4 équations et les 2 équations d'équilibre entre les forces extérieures et les réactions sur les appuis, donc en tout 4 n + 2 équations avec 4 n + 2 inconnues.

A l'aide de ce procédé, on pourra donc toujours déterminer la position de la ligne des fibres invariables ainsi que les pressions inconnues sur les appuis et cela, pour un nombre d'ouvertures quelconque.

21. La méthode indiquée ci-dessus sera fort longue vu le

Fig. 21.



grand nombre d'inconnues à éliminer; Mr. Clapeyronen a donné une autre beaucoup plus prompte qui conduit au même résultat; nous l'empruntons à l'ouvrage de *M. M. Molinos et Pronnier, Construction des ponts métalliques*, en généralisant cette méthode pour l'employer dans la suite.

Considérons l'une des n travées de la poutre et nommons:

A et B les efforts tranchants sur les appuis,

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les moments de rupture des forces extérieures sur les appuis A et B,

α et α' les tangentes des angles que fait la ligne des fibres invariables avec l'horizon sur les appuis,

c et c′ les ordonnées des appuis,

q la charge par unité de longueur,

$\mathfrak{M}_x$ le moment de rupture d'un point dont les abscisses et les ordonnées sont x et y, l'axe des y passant sur l'appui A; on a

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} + \frac{qx^2}{2} - Ax$$

remplaçant cette valeur de $\mathfrak{M}_x$ dans l'équation 41)

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} + \frac{qx^2}{2} - Ax \quad \ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

Si l'on prend les moments relativement au point B, on aura entre A $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les relations

$$Al - \mathfrak{M} + \mathfrak{M}' - \frac{ql^2}{2} = 0$$

d'où

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

Substituant cette valeur dans l'équation I. ci-dessus:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) x + \mathfrak{M} \quad \ldots\ldots \text{III.}$$

Intégrant cette équation et remarquant que pour $x = 0\ \frac{dy}{dx} = \alpha$ on a:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{qx^3}{6E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) \frac{x^2}{2E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}x}{E\Theta} \quad \ldots \text{IV.}$$

et pour $x = l$

$$\alpha' = \alpha - \frac{ql^3}{12E\Theta} + (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') \frac{l}{2E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \text{V.}$$

Intégrant encore une fois l'équation IV, en remarquant que pour $x = 0$, $y = c$

$$y = c + \alpha x = \frac{qx^4}{24E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) \frac{x^3}{6E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}x^2}{2E\Theta} \quad \text{V}^a.$$

et que pour $x = l$, on doit avoir $y = c'$

$$c' = c + \alpha l + \frac{ql^4}{24} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right) \frac{l^3}{6E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}^2}{2E\Theta}$$

d'où l'on tire:

$$\alpha = \frac{ql^3}{24E\Theta} - \frac{l}{6E\Theta} (2\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') + \frac{c' - c}{l} \quad \ldots\ldots \text{VI.}$$

Remplaçant cette valeur dans l'équation V.:

$$\alpha' = -\frac{ql^3}{24E\Theta} + \frac{l}{6E\Theta} (\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}') + \frac{c' - c}{l} \quad \ldots\ldots \text{VII.}$$

Ces deux dernières équations contiennent 4 inconnues $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ α et α'; en écrivant les équations analogues pour chaque travée, on obtiendra 2 n équations. Si l'on remarque que pour les appuis extrêmes $\mathfrak{M} = 0$ et que pour les appuis intermédiaires α et $\mathfrak{M}$ sont communs à deux travées, on aura comme inconnues:

n − 1 moments inconnus,
n + 1 angles sur les appuis.
ensemble 2 n inconnues.

L'élimination des inconnues sera singulièrement simplifiée, si nous introduisons des inconnues auxiliaires dans les équations VI. et VII.

Posons maintenant:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{l^3}{24\,E\Theta}\,\chi & \alpha' = \dfrac{l^3}{24\,E\Theta}\,\varphi \\ \mathfrak{M} = {}^2/_8\,\mu l^2 & \mathfrak{M}' = {}^2/_8\,\nu l^2 \\ c' - c = \varkappa\,\dfrac{l^4}{24\,E\Theta} & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII.}$$

les équations VI. et VII. s'écriront:

$$\chi = q - 2\mu - \nu + \varkappa$$
$$\psi = -q + \mu + 2\nu + \varkappa$$

et par une simple transformation elles deviennent

$$\left.\begin{array}{l} \nu = q - 2\mu - \chi + \varkappa \\ \psi = q - 3\mu - 2\chi + 3\varkappa \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IX.}$$

Ces équations permettent de déterminer les valeurs $\mathfrak{M}$ et α sur une pile au moyen des relations VIII, pourvu qu'on connaisse les valeurs correspondantes de la pile précédente.

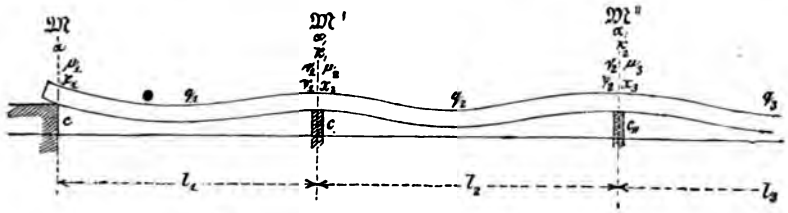
22. En faisant un emploi répété des équations IX du Nr. **21.** on peut obtenir la courbe des flexions, les moments sur les piles et les pressions sur les appuis pour une poutre reposant sur un nombre d'appuis quelconque.

Soient:

$l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ldots\ l_n$ la longueur des travées
$\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_{11}\ \mathfrak{M}_{111}\ \ldots\ \mathfrak{M}_n$ les moments sur les appuis
$\alpha\ \alpha_1\ \alpha_{11}\ \alpha_{111}\ \ldots\ldots\ \alpha_n$ les tangentes des angles formés par la poutre avec l'horizontale au-dessus des appuis,
$q_1\ q_2\ q_3\ \ldots\ldots\ q_n$ la charge par unité de longueur de chaque travée,
$c\ c_1\ c_{11}\ c_{111}\ \ldots\ldots\ c_n$ les coordonnées des appuis.

Introduisant d'une manière analogue aux équations VIII les valeurs auxiliaires:

Fig. 22.



$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{l_1^3}{24 E\Theta}\,\psi_1 = \frac{l_2^3}{24 E\Theta}\,\chi_2 \\
\alpha_{11} &= \frac{l_2^3}{24 E\Theta}\,\psi_2 = \frac{l_3^3}{24 E\Theta}\,\chi_3 \\
\mathfrak{M}_1 &= {}^2/_8\, l_1^2\, \nu_1 = {}^2/_8\, l_2^2\, \mu_2 \\
\mathfrak{M}_{11} &= {}^2/_8\, l_2^2\, \nu_2 = {}^2/_8\, l_3^2\, \mu_3 \\
c_1 - c &= \varkappa_1 \frac{l_1^4}{24 E\Theta} \\
c_{11} - c_1 &= \varkappa_1 \frac{l_2^4}{24 E\Theta}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; \text{X.}
$$

nous pourrons, pour chaque travée écrire les équations:

pour la première travée

$$
\left.\begin{aligned}
\nu_1 &= q_1 - 2\mu_1 - \chi_1 + \varkappa_1 \\
\psi_1 &= q_1 - 3\mu_1 - 2\chi_1 + 3\varkappa_1
\end{aligned}\right.
$$

pour la seconde travée

$$
\left.\begin{aligned}
\nu_2 &= q_2 - 2\mu_2 - \chi_2 + \varkappa_2 \\
\psi_2 &= q_2 - 3\mu_2 - 2\chi_2 + 3\varkappa_2
\end{aligned}\right. \quad . \; . \; 44)
$$

pour la $n^{ième}$ travée

$$
\left.\begin{aligned}
\nu_n &= q_n\, 2\mu_n - \chi_n + \varkappa_n \\
\psi_n &= q_n - 3\mu_n - 2\chi_n + 3\varkappa_n
\end{aligned}\right.
$$

Pour les culées extrêmes, le moment des forces extérieures est nul, donc:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n = 0$$

d'où résulte

$$\mu_1 = \nu_n = 0$$

L'élimination des auxiliaires n'offre aucune difficulté, vu la simplicité des équations.

Si l'on élimine au moyen de la relation X le système des inconnues $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots\ldots \chi_1\ \chi_2\ \chi_3 \ldots\ldots$, les équations 44) ne contiendront plus que les inconnues $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3 \ldots\ldots \psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \ldots\ldots$ d'où l'on déduira l'une après l'autre les valeurs $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3 \ldots\ldots$ et au moyen des relations X, les moments cherchés $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2\ \mathfrak{M}_3$ etc. sur les appuis.

Connaissant $\mathfrak{M}$, l'équation II permettra de trouver les réactions sur les appuis et l'équation V^a fournira la position de la ligne des

fibres invariables; tout sera alors connu. Nous montrerons, par un exemple, dans une autre partie, l'application de ces formules.

23. Les considérations sur lesquelles sont fondés les Nr. **19** à **22** supposent toujours que nous avons affaire à une poutre de section constante, ce qui ordinairement n'a lieu dans les constructions qu'approximativement.

Il arrivera pourtant en pratique que, *pour une travée*, les sections de la poutre seront à peu près constantes, pour les travées successives elles peuvent être *différentes*, mais les formules 44) seront encore applicables, seulement dans les relations X il faudra avoir soin d'introduire un Θ correspondant à chaque travée au lieu de le prendre constant.

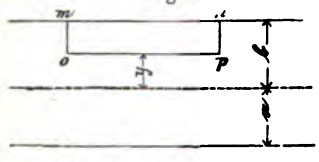
Si Θ varie pour une même travée, nos formules ne sont plus exactes, on obtiendra toutefois, dans la plupart des cas, des résultats encore passables, en prenant un Θ moyen.

24. Les résultats de la pratique montrent que le développement des calculs des Nr. **13** à **23** est suffisamment exact pour les moments d'inertie et les flexions des corps prismatiques — mais pour nos développements ultérieurs, il nous faut généraliser et modifier en partie cette méthode déjà employée par M. Navier.

Lorsqu'un prisme fléchit sous l'action d'une charge, il est non seulement soumis à des efforts de traction et de compression dans sa coupe longitudinale, mais dans toutes les directions agissent encore des forces de cisaillement; nous ne considérerons pour le moment que celles qui agissent parallélement au plan XY.

La résistance verticale ΣY, déterminée pour un élément quelconque par les équations 14) et 14ª) est, pour une poutre homogène, égale à la somme des composantes verticales de toutes les forces rasantes qui agissent sur l'élément considéré.

Fig. 23.



Considérons l'élément m n o p d'une poutre quelconque; nous pouvons au moyen des théories ci-dessus développées sur la résistance transversale, déterminer les composantes horizontales des tensions et des pressions moléculaires qui agissent sur (mo) et (np). Si nous nommons mo et np la somme de ces forces, pour que l'équilibre existe, il faut que le long de op agisse une force

$$s = (np) - (mo)$$

qui n'est autre chose que la *force rasante* sur la section horizontale (voir Nr. **12**.).

On se convaincra facilement de l'existence de cette force en se rappelant que, par exemple, dans une poutre à crémaillère, ce sont les adents qui doivent résister à la force rasante. — Cette force qui agit par cisaillement, produit un déplacement des atômes de la poutre et les surfaces qui, avant la flexion, étaient normales, deviennent après la flexion, obliques par rapport à la ligne des fibres invariables et les couches ne *sont plus concentriques*, ainsi

que nous l'avons supposé jusqu'ici. — Ce déplacement est si minime que les efforts de tension et de compression dans les fibres longitudinales n'ont pas subi de changement — il s'agit néanmoins de rechercher *de quelle façon la matière résiste à ces forces rasantes.*

Conservant les mêmes dénotations que celles employées dans les recherches sur les flexions, nous obtiendrons comme résultante de toutes les forces horizontales agissant sur np:

$$(\Sigma X) = \int_y^b \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \, zydy$$

mais d'après l'équation 31)

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} = \frac{\Sigma Xy}{\Theta}$$

d'où résulte

$$(\Sigma X) = \frac{\Sigma Xy}{\Theta} \int_y^b zydy$$

D'après ce que nous avons vu au commencement de ce Nro., la *force rasante* agissant en p sur la longueur dx est égale à $(\Sigma X) - (\Sigma X_,) = d(\Sigma X)$ et celle agissant en op *par unité de longueur* est:

$$S = \frac{d(\Sigma X)}{dx} = \frac{d(\Sigma Xy)}{dx} \frac{1}{\Theta} \int_y^b zydy$$

et en employant l'équation 17)

$$S = \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b zy \, . \, dy \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

On voit facilement que la force rasante atteint sa valeur maximum pour $y = o$, c'est-à-dire pour la ligne des fibres invariables. Si R représente les résultantes de toutes les tensions et de toutes les pressions qui agissent sur une section de poutre, et que $\mathfrak{H}$ soit la distance des points d'application de ces résultantes (voir N°. **7**). on a:

$$(\Sigma X) = R$$
$$\Sigma Xy = R\mathfrak{H}$$

donc pour la force rasante sur la ligne des fibres invariables:

$$S_0 = \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{H}} \frac{d(\Sigma Xy)}{dx}$$

et d'après l'équation 17)

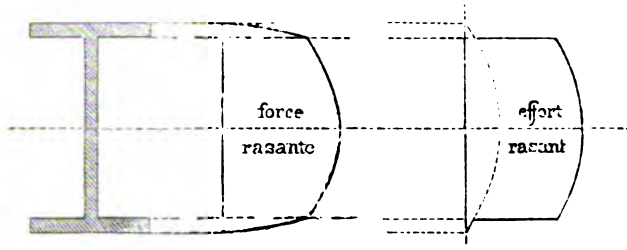
$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

où $\mathfrak{H}$ est tiré de l'équation 32) ou du N° **17.**

La force rasante S, pour une hauteur quelconque, peut être facilement déterminée par l'équation 45); pour une même coupe $\frac{\Sigma Y}{\Theta}$ est constant et l'intégrale de l'équation 45) représente le moment du fragment de la section comprise entre les ordonnées **x** et **b** relativement à l'axe neutre.

Pour la forme des sections qu'on rencontre généralement en pratique, on pourra facilement déterminer ces moments, qui correspondent aux diverses ordonnées y; on en déduira les S, parce qu'ils sont proportionnels à ces moments, soit au moyen d'une simple multiplication, ou bien en faisant usage d'une échelle de réduction, dès que la force rasante sur la ligne des fibres invariables sera déterminée. Si l'on porte pour une série suffisante de y, ces forces

Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26.



comme ordonnées, ainsi que nous l'avons fait dans la fig. 25, on obtiendra une courbe qui montrera clairement l'augmentation de la force rasante vers la ligne des fibres invariables. Lorsque la section de la poutre est rectangulaire, la force rasante est proportionnelle aux ordonnées d'une parabole dont le sommet est situé sur la ligne des fibres invariables et dont l'axe est horizontal. — Lorsque la section sera formée de divers rectangles, la courbe des S se composera de divers arcs de parabole dont tous les sommets seront situés sur la ligne des fibres invariables et dont les axes seront également horizontaux.

La force rasante soumet la matière à un effort de cisaillement; on obtiendra l'effort rasant, d'après les équations 45) et 46), en les divisant par la largeur de la section à l'endroit qu'on considère

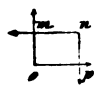
$$\mathfrak{S} = \frac{S}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

Ainsi que nous venons de le faire pour S, nous pourrons aussi construire $\mathfrak{S}$ graphiquement; pour une poutre à section rectangulaire, la courbe des $\mathfrak{S}$ comme celle des S est encore une parabole, et pour une section formée de divers rectangles, la courbe se composera d'arcs de parabole qui appartiennent tous à la même courbe, mais qui sont séparés par des intervalles; tous les sommets sont situés sur la ligne des fibres invariables (voir Fig. 26). — Plus z est petit, plus l'effort rasant est grand; les recherches que nous venons de faire acquièrent surtout de l'importance pour des poutres à parois verticales de faible épaisseur.

25. Non seulement dans les coupes longitudinales, mais dans toutes les parties de la poutre et dans toutes les directions, les molécules tendent à se séparer, en glissant les unes sur les autres.

Considérons les forces rasantes dans une coupe verticale, nous avons vu que leur somme est ΣY. Si cette somme était répartie uniformément sur toute la surface, on aurait déjà trouvé la résistance au cisaillement. En général cela n'a pas lieu, mais nous pourrons juger de la répartition de ces forces ΣY par les considérations suivantes:

Fig. 27.



Soit mnop un élément de poutre infiniment petit de dimension dx dy. Les forces qui agissent sur cet élément sont:

1° Dans le sens vertical *le long* de mo et np deux efforts tranchants Vdy (dont la différence infiniment petite de second ordre peut être négligée).

2° *Perpendiculairement* à mo et np, des tensions moléculaires directement opposées les unes aux autres, de différence infiniment petite de second ordre;

3° *Le long* de mn et op, deux forces rasantes horizontales Sdy (de différence infiniment petite de second ordre et qu'on peut négliger.

4° *Perpendiculairement* à mn et op, des efforts tranchants directement opposés, produits par le mode de répartition de la charge, de différence infiniment petite de second ordre et qu'on peut négliger.

Comme conditions d'équilibre nous aurons simplement:

$$S \cdot dx \times dy = Vdy \times dx$$
$$S = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

S se trouvant d'après les équations 45) et 46).

Donc: *La force rasante par unité de longueur agissant sur un point donné d'une coupe verticale, est égale à la force rasante horizontale agissant sur ce même point,* cette dernière étant aussi réduite à l'unité de longueur.

Nous avons déjà montré ci-dessus, que la somme des forces rasantes verticales doit être égale à ΣY; nous devons arriver au même résultat, en additionnant toutes les forces rasantes qui agissent dans la coupe verticale et qui sont calculées d'après les équations 45) et 48). Intégrant la relation Vdy entre les limites y et b, on aura:

$$\int_y^b Vdy = \int_y^b \frac{\Sigma Y}{\Theta}\, dy \int_y^b zydy$$
$$= \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b dy \int_y^b zydy$$
$$= \frac{\Sigma Y}{\Theta} \left[y \int_y^b zydy - \int_y^b zy^2 dy \right]$$

pour y = o, le premier terme devient nul, puisque la ligne des fibres invariables passe par le centre de gravité et le second terme devient égal à Θ, donc

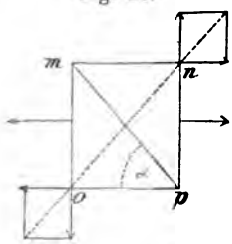
$$\int_b^a V dy = \Sigma Y$$

ce que nous avons voulu prouver.

D'après les équations 45) et 48), nous connaissons les forces rasantes longitudinales et verticales; d'après l'équation 25), nous connaissons de plus la répartition des forces horizontales dans la coupe verticale; il nous reste à déterminer *les forces verticales dans la coupe longitudinale*; la valeur de ces forces dépend de la répartition de la charge et elles sont nulles d'après ce que nous venons de voir, lorsque la charge est répartie sur la surface proportionnellement à la valeur de ΣY ci-dessus indiquée; ce cas le plus simple formera la base des développements suivants.

26. D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, nous connaissons toutes les forces qui agissent au pourtour de m n o p, nous pouvons donc *pour une direction quelconque, déterminer les forces moléculaires* qui agissent à l'intérieur de m n o p. Si dans la fig. 28, mp représente une section horizontale quelconque, la résultante des forces agissant sur cette section formera avec cette dernière un angle donné. Si l'on décompose cette résultante parallèlement et perpendiculairement à cette surface, la composante parallèle représentera une force rasante, la composante perpendiculaire une tension ou une pression.

Fig. 28.



Si nous nommons

C la force rasante par unité de longueur,

D la pression ou la tension normale par unité de longueur,

$\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ les efforts correspondants par unité carrée,

y la distance de l'élément moléculaire à la ligne des fibres invariables,

$\mathfrak{A}_y$ la tension ou la compression longitudinale dans cet élément,

z l'épaisseur dans le sens de l'axe des z de l'élément m n o p; posons encore

$$\begin{aligned} mp &= ds \\ mn &= dx \\ np &= dy \end{aligned}$$

on aura les relations suivantes:

Force rasante: $Cds = Vdy \sin\alpha - Sdx \cos\alpha + \mathfrak{A}_y . z . dy . \cos\alpha$

Tension ou compres.: $Dds = Vdy \cos\alpha + Sdx \sin\alpha + \mathfrak{A}_y . z . dy . \sin\alpha$

les significations de S et V sont indiquées par les équations 45) et 48), $\mathfrak{A}$ indique l'effort que supportent les fibres longitudinales les plus éloignées, puisque

$$dy = ds \sin \alpha$$
$$dx = ds \cos \alpha$$

et que, d'après l'équation 48) $S = V$, nous obtiendrons par quelques réductions

$$C = S \cos 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y z}{2} \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

$$D = S \sin 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y z}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad . \quad 50)$$

Si, dans ces deux équations, on veut introduire au lieu des *forces rasantes* les efforts correspondants dans les fibres les plus éloignées, il n'y a qu'à placer:

$$C = z\mathfrak{C}$$
$$S = z\mathfrak{S}$$

et l'on obtient:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{S} \cos 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y}{2} \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad 51)$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{S} \sin 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad . \quad 52)$$

Les équations 49) à 52) donnent *d'une manière tout-à-fait générale et pour un point quelconque d'une poutre homogène, les valeurs de tension, de compression et de force rasante*; les équations 31), 45) et 47) serviront à déterminer les valeurs de S, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{A}$.

Afin de déterminer les valeurs maxima de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, nous considérons toujours l'élément de poutre pour lequel $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{A}_y$ sont invariables; on obtiendra pour $\mathfrak{C}$ un maximum ou un minimum lorsque

$$\frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha} = -2\,\mathfrak{S} \sin 2\alpha + \mathfrak{A}_y \cos 2\alpha = 0$$

d'où résulte

$$\operatorname{tang} 2\alpha = {}^1/_2 \frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{S}}$$

remplaçant cette valeur dans l'équation 51), on aura:

$$\mathfrak{C}_{max} = \sqrt{\mathfrak{S}^2 + ({}^1/_2\,\mathfrak{A}_y)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 53)$$

Les équations 51) et 54) montrent de plus que, dans les fibres les plus éloignées ($y = a$) on a $\mathfrak{S} = 0$, et pour $\alpha = 45^0$, $\mathfrak{C} = {}^1/_2\,\mathfrak{A}$ et en même temps maximum, tandis que pour $\alpha = 0$ et 90^0, $\mathfrak{C} = 0$, donc minimum.

Dans la ligne des fibres invariables $y = 0$, on a pour

$\alpha = 90^0$ . . . $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ et maximum,

$\alpha = 0^0$ . . . $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ également maximum.

Pour les fibres situées entre les fibres neutres et les fibres les plus éloignées, $\mathfrak{C}$ peut devenir plus grand que $\mathfrak{A}$; à cet effet il faudra que $\mathfrak{S}$ dans la coupe horizontale soit notablement plus grand que ${}^1/_2\,\mathfrak{A}_y$ et ce dernier presque égal à $\mathfrak{A}$ qui agit sur les fibres extrêmes, ce qui arrivera rarement.

Nous déterminerons d'une manière analogue le *maximum ou le minimum* de $\mathfrak{D}$, qui aura lieu lorsque

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\alpha} = 2\,\mathfrak{S}\cos 2\alpha + \mathfrak{A}_y \sin 2\alpha$$

d'où résulte

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}_y}$$

Remplaçant cette valeur dans l'équation 51), on aura comme maximum de $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}_{max} = \frac{\mathfrak{A}_y}{2} \pm \sqrt{\mathfrak{S}^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}_y}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

Dans les fibres extrêmes $\mathfrak{S} = 0$, donc

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{A}_y}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

d'où il résulte:

$\alpha = 0 \ldots \mathfrak{D} = 0$ et minimum,

$\alpha = 90^0 \ldots \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}$ et maximum.

Dans *la ligne des fibres invariables* $\mathfrak{A}_y = 0$, donc

$\alpha = 45^0 \ldots \mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ et maximum.

Pour les *fibres intermédiaires*, l'équation 55) montre que $\mathfrak{D}_{max}$ est en tout cas plus grand que $\mathfrak{A}_y$ et que $\mathfrak{S}$, lors même que $\mathfrak{S}$ aurait une valeur très-petite, il est vrai, mais pourtant appréciable. C'est à cause de l'influence qu'exerce l'effort rasant $\mathfrak{S}$ sur la valeur $\mathfrak{D}_{max}$ qu'il faudra toujours prendre pour effort rasant $\mathfrak{S}_0$ dans les fibres neutres, une valeur notablement plus faible que la tension maximum $\mathfrak{A}_0$ (ou pression $\mathfrak{B}_0$) dans les fibres extrêmes; nous prendrons généralement dans la suite

$$\mathfrak{S}_0 \leqq 0{,}6\,\mathfrak{A}_0 \leqq 0{,}6\,\mathfrak{B}_0 \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

où $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{B}_0$ ont les significations ci-dessus indiquées.

En prenant la relation que fournit l'équation 56), nous verrons par des exemples, que les tensions ou les pressions dans les fibres extrêmes ne seront pas sensiblement dépassées, principalement parce que $\mathfrak{A}_y$ obtient sa plus grande valeur dans les fibres extrêmes, tandis que $\mathfrak{S}$ l'obtient dans les fibres neutres; pour des poutres continues, les tensions obliques sur les parois dépasseront les tensions maxima longitudinales dans le voisinage des appuis, parce qu'ici les nervures et les parois verticales sont, pour une même section, soumises en même temps à des efforts considérables, (vu qu'à la limite entre la nervure et la paroi verticale, $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{S}_0$ agissent encore à peu près avec leurs valeurs maxima); il peut arriver de même pour des poutres homogènes soumises à l'action de charges concentrées, que max $\mathfrak{V}$ et max $\mathfrak{M}$ coïncident pour une même coupe, de façon que max $\mathfrak{D}$ soit aussi plus grand que max $\mathfrak{A}$ (ce qui dépendra du rapport existant entre l'épaisseur des nervures et la hauteur de la poutre).

Pour chaque élément, $\mathfrak{D}_{max}$ est formé de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{A}_y$ d'après l'équation 55); nous donnons dans la table VI *les valeurs maxima de* $\mathfrak{D}$ pour divers $\mathfrak{S}$ (efforts rasants horizontaux) et $\mathfrak{A}_y$ (efforts longitudinaux dans l'élément du corps considéré).

Table VI.

$\mathfrak{A}_y =$	100	200	300	400	500	600	700	800
$\mathfrak{S} = 100$	161,8	241,4	330,2	423,6	519,2	616,2	714,0	812,3
200	256,1	328,6	400,0	482,8	570,1	660,4	753,1	847,2
300	354,1	416,2	485,4	560,6	640,5	724,2	811,0	900,0
400	453,1	512,2	576,9	647,2	721,7	800,0	881,5	965,6
500	552,4	609,9	672,0	738,5	809,0	883,1	960,3	1040,3
600	652,1	708,3	768,3	832,5	900,0	970,8	1044,6	1121,2
700	751,8	807,1	865,9	928,0	993,3	1061,6	1132,6	1206,2
800	851,6	906,2	963,9	1024,4	1088,2	1154,4	1223,2	1294,4

27. Nous allons montrer par un exemple simple, l'influence réciproque des valeurs de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{A}_y$, lorsqu'ils agissent en même temps. La planche I donne graphiquement les diverses coupes pour des poutres de pont de 1,5 mètre de hauteur, la coupe N° 1 est supposée être celle d'une poutre continue au-dessus des appuis; les coupes N° 2 et 3 celles de poutres reposant librement sur deux appuis et correspondant au pont de 15 mètres d'ouverture, calculé dans le quatrième chapitre et représenté dans la planche VI.

On a calculé d'abord, d'après l'équation 31), l'effort horizontal dans les fibres extrêmes, lequel diminue régulièrement jusqu'à la ligne des fibres invariables; ensuite l'effort rasant horizontal a été calculé d'après les équations 45) et 47) et enfin les tensions ou les pressions obliques maxima d'après l'équation 55); chacune de ces valeurs a été portée à l'échelle dans les figures de la planche I, ensorte qu'un coup d'œil suffit pour juger de la valeur numérique des forces qui agissent sur divers points de la poutre. On voit que pour les coupes admises, la tension $\mathfrak{D}_{max}$ ne dépasse

la tension maximum longitudinale $\mathfrak{A}$ que pour la coupe N° 1 de la poutre continue, mais qu'elle est toujours plus grande que la tension longitudinale dans la coupe horizontale respective, excepté dans la fibre extérieure où elles sont égales.

28. Dans la planche VII nous donnons graphiquement pour les poutres du *pont de chemin de fer de Langon* les valeurs des forces rasantes horizontales et des tensions (ou pressions) maxima qui agissent en direction oblique; nous avons admis pour tension longitudinale maximum dans les fibres extrêmes 600 kilogr. et pour l'effort rasant dans l'axe neutre 350 kilogr. par centimètre carré; le calcul numérique des points de courbe est consigné dans les tables suivantes VII et VIII; on s'est servi des formules 31) pour le calcul de $\mathfrak{A}$, 45) et 47) pour $\mathfrak{S}$ et 55 pour $\mathfrak{D}_{max}$.

Table VII.

Calcul de l'effort rasant horizontal.

Coupe horizontale.	Surface des sections.	Ordonnées des centres de gravité.	Moment des surfaces.	Somme des moments: $\int_y^b zydy$	Largeur z des coupes horizontales.		$\left(\frac{\int_y^b zydy}{z}\right)$		Observations.
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		(6)		
VII.				0	90		0		Les cornières extrêmes et les parois verticales doivent être ajoutées à la coupe des tables horizontales. Colonne (4) est proportionnelle à la force rasante horizontale $\mathfrak{S}$. Colonne (6) est proportionnelle à l'effort rasant horizontal $\mathfrak{S}$.
—	$90 \times 4{,}8$ $+ 61{,}4 \times 1{,}2$	272,6 269,6	167515						
—	$+ 90 \times 3{,}2$ $+ 12 \times 3{,}4$	264,5 254,0							
VI.				167515	90	21,2	1861,3	7901	
—	$21{,}2 \times 1{,}2$	269,6	6858						
V.				174373	21,2	3,6	8225	38437	
—	$9 \times 3{,}6$	264,5	8570						
IV.				182943	3,6	1,2	50817	152452	
—	$100 \times 1{,}2$	210	25200						
III.				208143	1,2		173452		
—	$80 \times 1{,}2$	120	11520						
II.				219663	1,2		183052		
—	$80 \times 1{,}2$	40	3840						
I.				223503	1,2		186252		

Table VIII.

Calcul du maximum des tensions (pressions) $\mathfrak{D}_{max}$ *en coupe oblique.*

Coupe horizontale.	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{S}$		$\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}}{2}\right)^2+\mathfrak{S}^2}$		Tension ou pression maximum $\mathfrak{D}_{max}$.		Observations.
	(1)	(2)		(3)		(4)		
VII.	600	0		300		600		
VI.	590	15	0	295,5	295	590,5	590	On obtient $\mathfrak{D}_{max}$ en prenant la moitié des valeurs de $\mathfrak{A}$ de la colonne (1) et en l'ajoutant aux valeurs de la colonne (3); voir l'équation 55).
V.	586	90	16	306,5	298,5	600	586,5	
IV.	567	286	96	403	299,6	687	583,6	
III.	350	325		369		544		
II.	175	345		356		444		
I.	0	350		350		350		

Près de la nervure, nous trouvons *comme pression oblique maximum* dans la paroi verticale 687 kilogr. par centimètre carré, valeur notablement plus forte que l'effort maximum dans les fibres extrêmes; si donc pour de grandes poutres à parois pleines, on ne veut pas donner une épaisseur démesurée à la paroi verticale (ce que l'économie défend), il faut que l'effort longitudinal dans la nervure, pour le point où la nervure et la paroi verticale ont en même temps à supporter le plus grand effort, soit suffisamment plus faible que la tension maximum admise pour le calcul du pont; dans le cas qui nous occupe, cet effort de 687 kilogr. est encore admissible, mais si l'on s'était posé la condition de ne pas dépasser 600 kilogr., il n'aurait fallu prendre pour la tension longitudinale dans les fibres extrêmes qu'environ 525 kilogr. par centimètre carré.

29. Lorsqu'un corps prismatique, dont la longueur est grande relativement à la dimension de sa coupe, est soumis à une pression P dans le sens de sa longueur, on remarque un ploiement du prisme; en raison de ce ploiement, la rupture arrive plus tôt que ne l'indique l'équation 21) pour la pression, le prisme est soumis *à la fois à un effort de pression et à la flexion.*

Fig 29.

Si nous connaissons la forme que prend l'axe longitudinal du prisme, ainsi que la distance de la force P à cet axe, on pourra déterminer la pression et la flexion de chaque point de ce prisme, ainsi que nous l'avons vu dans la recherche de la résistance des corps à la flexion.

Nous placerons l'axe des x dans la direction de la force P, nous admettrons que le ploiement de l'axe soit symétrique par rapport à l'axe des x, ce qui suppose le prisme complétement libre à ses extrémités.

Nous nommerons

d la distance du centre de gravité des deux coupes extrêmes à l'axe des x,

f la distance de la coupe moyenne à la direction de la force, qui représente également le plus grand écartement de l'axe, lorsqu'il est ployé.

L la longueur du prisme,

ω la section du prisme,

Θ le moment d'inertie de la coupe relativement à un axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan du ploiement,

u la distance de la ligne des fibres invariables au centre de gravité de chaque section,

$\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{B}_0$ les tensions et les pressions des fibres les plus éloignées agissant aux distances a_0 et b_0.

Supposons une coupe quelconque de ce prisme et nommons x et y les coordonnées du centre de gravité de cette coupe. Figurons-nous un élément quelconque z . db de cette coupe perpendiculaire au plan xy, c'est-à-dire parallèle à la couche neutre et soit

b la distance de cet élément à la ligne des fibres invariables,

v la distance de cet élément au centre de gravité de la coupe.

Nous obtiendrons d'une manière tout-à-fait semblable à ce que nous avons vu au N° **13**, pour la pression qui agit sur l'élément z . db

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} b \,.\, z\, db$$

et les conditions d'équilibre pour cette coupe deviennent:

$$P + \frac{\mathfrak{A}_0}{a_0}\int_0^{a_0} \mathfrak{a} \,.\, z\, d\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}\int_0^{b_0} \mathfrak{b} z \,.\, d\mathfrak{b} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 57)$$

$$P\,(y + u) = \frac{\mathfrak{A}_0}{a_0}\int_0^{a_0} \mathfrak{a}^2 z\, d\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{B}}{b_0}\int_0^{b_0} \mathfrak{b}^2 z \,.\, d\mathfrak{b} \quad . \quad . \quad 58)$$

Si nous remarquons que $\frac{\mathfrak{A}_0}{a_0} = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}$ et que

$$\Theta_u = \int_0^{a_0} \mathfrak{a}^2 z\, d\mathfrak{a} + \int_0^{b_0} \mathfrak{b}^2 z\, d\mathfrak{b}$$

représente le moment d'inertie de la coupe pris par rapport à l'axe neutre, il résulte de l'équation 58)

$$P\,(y + u) = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \,.\, \Theta_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58^a)$$

D'après les lois de la mécanique, on sait qu'entre le moment d'inertie Θ_u et le moment d'inertie Θ pris par rapport au centre de gravité de la coupe, il existe la relation

$$\Theta_u = \Theta + \omega \,.\, u^2$$

et d'après la définition du centre de gravité

$$\int_0^{a_0} \mathfrak{a} \,.\, z \,.\, d\mathfrak{a} + \int_0^{b_0} \mathfrak{b} \,.\, z d\mathfrak{b} = \omega \,.\, u$$

les équations 57) et 58) peuvent être mises sous la forme simple:

$$P = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \,.\, u \,.\, \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

$$P\,(y + u) = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0}\,(\Theta + \omega u^2) \quad . \quad . \quad 60)$$

Il résulte des équations 59) et 60)

$$u = \frac{\Theta}{\omega \,.\, y} \,.\, . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

Pour $x = o$, nous avons $y = f$, donc pour la coupe moyenne

$$u = \frac{\Theta}{\omega \,.\, f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61^a)$$

c'est-à-dire que, lorsque la distance de la force P au centre de gravité est connue, on obtiendra le déplacement u de la ligne des fibres invariables d'après l'équation 61) ou 61ª).

30. Si dans l'équation 59), on remplace la valeur trouvée pour u par l'équation 61), on aura

$$Py = \frac{\mathfrak{B}_0}{b_0} \,.\, \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

Désignant par v_0 (notation correspondante à celle de v ci-dessus indiquée) la distance de la fibre pressée extérieure au centre de gravité de la coupe, on a

$$b_0 = u + v_0$$

et l'équation 62) peut s'écrire:

$$Py = \frac{\mathfrak{B}_0}{u + v_0} \,.\, \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62^a)$$

et en employant l'équation 61):

$$\mathfrak{B}_0 = Py \cdot \frac{v_0}{\Theta} + \frac{P}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

De même pour l'effort de la fibre la plus tendue, on aura

$$\mathfrak{A}_0 = Py \cdot \frac{v_0}{\Theta} - \frac{P}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63^a)$$

Pour la coupe moyenne, il faut prendre $y = f$. Si dans l'équation $63^a)$ $\mathfrak{A}_0$ est négatif, c'est une preuve qu'il n'existe aucune tension, mais seulement des pressions dans la coupe considérée.

Si l'on compare les équations 20) et 31) avec l'équation 63) on voit que la pression maximum $\mathfrak{B}_0$ dans la coupe considérée se compose de la pression $\frac{P}{\omega}$ qui résulte de la pression P uniformément répartie sur l'unité carrée, et de la pression qui résulte du moment de la force P agissant au bras de levier y qui produit le ploiement; cette pression est égale à celle qu'aurait à supporter un prisme de longueur 4 y ou 4 f, reposant librement sur deux appuis et chargé en son milieu du poids P.

31. L'équation 63) permettrait de trouver immédiatement la pression maximum d'un prisme soumis à la flexion, lorsque la distance f de la force serait connue; cette distance se compose de la flèche du ploiement et de la distance d de la force avant le ploiement. Cette dernière distance est souvent connue et peut servir à déterminer la distance inconnue f; à cet effet nous nous servirons de l'équation de la courbe élastique.

Au moyen de considérations analogues à celles développées dans le N° **18** et désignant par ϱ_1 le rayon de la ligne des fibres invariables, nous aurons pour la position de l'axe neutre — d'après l'équation 40)

$$\Sigma Xy = Py = \frac{\Theta E}{\varrho_1}$$

et si nous nommons ϱ le rayon de l'axe du centre de gravité, donc $\varrho_1 = \varrho + u$, on aura

$$Py = \frac{\Theta E}{\varrho + u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64)$$

La géométrie analytique donne pour ϱ la valeur $\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; remplaçant encore u par sa valeur donnée dans l'équation 61), on tirera de l'équation 64):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Py}{\Theta\left(E - \frac{P}{\omega}\right)} = \frac{y}{\Theta\left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

Pour plus de simplicité nous nommerons t le terme $\Theta\left(\frac{E}{P}-\frac{1}{\omega}\right)$ donc:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 65^a)$$

Intégrant cette équation, on trouve

$$y = C \cdot \sin\frac{x}{\sqrt{t}} + C_1 \cos\frac{y}{\sqrt{t}} \quad \ldots \quad 66)$$

dans laquelle C et C_1 sont deux constantes; nous les déterminerons en remarquant que y doit avoir la même valeur pour x et pour (— x) d'où il résulte:

$$C = o, \text{ et plaçant } x = \frac{L}{2}, \text{ donc } C_1 = f$$

l'équation 66) s'écrira:

$$\left.\begin{aligned} d &= f\cos\frac{L}{2\sqrt{t}} \\ f &= \frac{d}{\cos\frac{L}{2\sqrt{t}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Remplaçant enfin cette valeur de f dans l'équation 63), on obtiendra

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{P}{\omega} + \frac{Pv_0}{\Theta}\frac{d}{\cos\frac{L}{2\sqrt{t}}} \quad \ldots\ldots \quad 68)$$

de même de l'équation 63^a) on obtient

$$\mathfrak{A}_0 = -\frac{P}{\omega} + \frac{Pv_0}{\Theta}\frac{d}{\cos\frac{L}{2\sqrt{t}}} \quad \ldots \quad 68^a)$$

Tirant la valeur de P de l'équation 68)

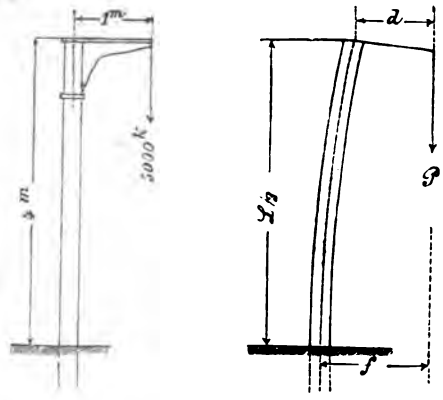
$$P = \mathfrak{B}_0\omega\,\frac{1}{1+\frac{v_0\omega}{\Theta}\cdot\frac{d}{\cos\frac{L}{2\sqrt{t}}}} \quad \ldots \quad 69)$$

La valeur de P de cette dernière équation ne peut être trouvée que par tâtonnement, puisque le terme $t = \Theta\left(\frac{E}{P}-\frac{1}{\omega}\right)$ renferme aussi la force P.

32. Prenons un exemple pour montrer l'application des formules.

Une colonne pleine, en fonte, de coupe cylindrique de 4 mètres de hauteur, dont la base est solidement fixée au sol, est soumise

Fig. 30.



à l'effort d'un poids de 5000 kilogr. agissant à 1 mètre de distance de son sommet; la base étant fixe, la tangente y reste toujours verticale et nous n'avons alors qu'à nous occuper de la moitié du prisme de la fig. 29, ainsi que le montre la fig. 30, et la hauteur l de cette dernière, dans l'emploi de nos formules, doit être remplacée par $\frac{L}{2}$; nous aurons donc, en exprimant le tout en centimètres et en kilogrammes:

$$L = 2l = 800 \text{ centimètres;}$$

Soit le diamètre de la colonne D = 20 centimètres, donc

$$v_0 = \frac{D}{2} = 10 \text{ centimètres,}$$

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4} = 314 \text{ centim. carrés,}$$

$$\Theta = \frac{\pi D^4}{64} = 7854$$

$$t = \frac{\Theta E}{P} = \frac{\Theta}{\omega} = 1'413000$$

d'où il résulte d'après l'équation 68)

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{5000}{314} + \frac{5000 \cdot 10}{7854} \cdot \frac{100}{\cos \frac{800}{2\sqrt{1413000}}}$$

$$\mathfrak{B}_0 = 16 + 677 = 693 \text{ kilos.}$$

Afin de trouver le ploiement de la colonne, nous écrirons d'après l'équation 67)

$$f = \frac{d}{\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}} = \frac{d}{0{,}94} = 106 \text{ centim.,}$$

d'où résulte une flèche de ploiement f—d de 6 centimètres. — Ce ploiement est déjà assez grand, il peut néanmoins être négligé pour la détermination approximative de la pression maximum; car si l'on avait placé dans l'équation 63) au lieu de 106 centimètres la valeur primitive d = 100 centimètres, on aurait obtenu $\mathfrak{B}_0 = 16 + 639 = 655$ kilogr., au lieu de la valeur plus exacte de 693 kilogr.; pour des ploiements moins grands, cette approximation donne des résultats suffisamment exacts.

33. Plus la distance d est grande, c'est-à-dire plus la direction de la force est éloignée de l'axe du prisme, plus aussi le maximum de la compression pour une longueur donnée du prisme sera grand; d'un autre côté, si une pression déterminée ne doit pas être dépassée, plus la longueur du prisme sera grande, plus la distance d devra être prise petite.

Tirant la valeur de d de l'équation 68), nous trouvons

$$d = \left(\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega}\right) \frac{\Theta}{P v_0} \cos \frac{L}{2\sqrt{t}} \quad . \quad . \quad 70)$$

Si nous avons une colonne fixée à sa base, d'un diamètre D = 20 centimètres et chargée d'un poids P = 5000 kilogr. on aura

$$\omega = 314 \text{ centimètres carrés}$$

$$\frac{P}{\omega} = 16 \text{ kilogr. par centimètre carré.}$$

Si $\mathfrak{B}_0$ ne doit pas dépasser 1200 kilogr., on aura $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega} = 1184$; si $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega}$ est six fois plus grand, donc = 7104, on aura aussi d six fois plus grand, tandis que $\mathfrak{B}_0 = 7120$ kilos, valeur peu éloignée du point de rupture. — Nous avons calculé pour ces deux valeurs de $\mathfrak{B}_0$ une série de d pour diverses longueurs, en remplaçant dans l'équation 70) les valeurs numériques ci-dessus indiquées; nous donnons les résultats obtenus dans la table IX.

Table IX.

d exprimé en centimètres:		$l = \frac{L}{2}$
$\mathfrak{B}_0 = 1200$	$\mathfrak{B}_0 = 7120$	en mètres.
d = 175,3 c.	d = 1052 c.	4
162,6	976	6
145,5	872	8
123,9	743	10
98,9	594	12
71,2	427	14
41,4	248	16
10,5	63	18
0,0	0	18,67

nous avons de plus: $\Theta = 7854$
$v_0 = 10$ c.
$t = 1413000$

d'où résulte pour $\mathfrak{B}_0 = 1200$ kilogr.

$$d = 185{,}9 \cos \frac{L}{2378}$$

et pour $\mathfrak{B}_0 = 7120$ kilogr.

$$d = 1115{,}3 \cos \frac{L}{2378}$$

$\cos \frac{L}{2378} = 0$ ou $\frac{L}{2} = 18{,}67$ m. donne $d = 0$ et cela pour chaque pression $\mathfrak{B}_0$, tandis que pour 18 mètres, les valeurs de d sont encore notables; ceci montre qu'une colonne pleine, en fonte à base fixe, dont la longueur est de 18,67 mètres et le diamètre de 20 centimètres ne peut plus supporter une charge de 5000 kilogr., qui, agissant exactement au centre de gravité de la colonne, produirait la rupture.

Des considérations analogues pourront être faites à l'aide de l'équation 68a), lorsque *l'effort de tension* maximum sera déterminé d'avance.

34. Nous venons de voir que pour une longueur donnée, le point de rupture est nettement marqué et pour le cas le plus favorable, lorsque $d = 0$, c'est-à-dire lorsque la force agit selon l'axe du prisme, nous pouvons déterminer la charge de rupture.

Si dans les équations 68) à 70) on écrit $d = 0$, il en résulte que $\mathfrak{B}_0 = \frac{P}{\omega}$, ce qui n'est exact que pour des prismes fort courts, ou bien il faut, non-seulement que d, mais aussi que $\cos \frac{L}{2\sqrt{t}}$ soit nul, donc

$$\frac{L}{2\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots \quad 71)$$

Cette équation a déjà été obtenue dans le numéro précédent et peut être considérée comme équation de condition pour servir à déterminer la charge de rupture.

Si nous plaçons dans cette équation la valeur de $t = \frac{\Theta E}{P} - \frac{\Theta}{\omega}$ on obtient

$$P = E\omega \frac{1}{\frac{\omega L^2}{\pi^2 \Theta} + 1} \quad \ldots\ldots \quad 72)$$

Négligeant 1 relativement à $\frac{\omega L^2}{\pi^2 \Theta}$, ce qu'on pourra toujours faire pour des prismes de longueur un peu considérable, on aura:

$$P = \frac{\pi^2 \Theta E}{L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

équation déjà donnée par Navier pour déterminer *la charge produisant la rupture de prismes de longueur assez considérable.*

Non-seulement cette équation ne nous permet pas de trouver les pressions, mais encore elle n'est pas applicable à des prismes de faible longueur, car P ne doit jamais dépasser la valeur trouvée par l'équation 21) pour la résistance des corps à la compression, au contraire P doit être toujours plus petit à cause du ploiement.

Même pour des prismes de longueur assez grande, la formule 72) ne coïncide nullement avec les résultats fournis par l'expérience. Nous emploierons comme exemple les expériences faites par M. Hodgkinson sur des prismes rectangulaires de 1 pouce anglais de côté et nous les comparerons avec les résultats fournis par l'équation 72).

La table X montre que l'équation 72) est inexacte aussi bien pour des prismes de faibles longueurs que pour ceux d'une longueur assez grande; ce n'est que pour le cas où la longuenr est d'environ 30 fois le diamètre, qu'elle coïncide avec l'expérience. Il est remarquable que l'équation 72) pour des prismes de grandes longueurs fournisse des résultats encore plus défavorables que ceux donnés par l'expérience; ceci résulte probablement de ce que les extrémités n'étaient pas complétement libres ainsi que le suppose la formule, mais qu'elles étaient aplaties.

Table X.

Longueur L du prisme en pouces anglais.	$\frac{L}{D}$	Charge de rupture en ℔ anglaises.	
		trouvée.	calculée.
10 pieds anglais	120	4245	1280
7,5 pieds	90	10236	2276
5 pieds	60	18106	5121
2,5 pieds	30	26530	20480
1,25 pieds	15	36162	(81940)
7 1/2 pouces	7,5	50946	(327760)
3 3/4 pouces	3,75	55200	(1'487400)

Remarque. Les chiffres entre parenthèse ne sont pas valables, puisque la charge de rupture ne peut jamais être plus grande que celle qui a été trouvée pour la matière, lorsque celle-ci est soumise à des efforts de compression.

Si nous passons de la charge de rupture à celle de charges moins grandes, les valeurs de K varient aussi; il serait très difficile et fort long de déterminer pour une pression quelconque $\mathfrak{B}_m$ la valeur correspondante K; l'équation 75) ne peut servir absolument qu'à déterminer la charge de rupture.

Nous avons vu dans le n° **33** que la pression augmente rapidement pour des prismes de grandes longueurs, lorsqu'on se trouve dans le voisinage du point de rupture; la valeur admise ordinairement pour la pression peut être atteinte sous l'influence d'un poids qui n'est pas très-éloigné de la charge de rupture; il n'est donc pas permis de charger des prismes qui se trouvent dans les conditions indiquées, d'une valeur égale à celle admise en général pour les efforts de compression. On obtiendra un résultat plus exact et dans tous les cas plus sûr, en ne prenant qu'une partie déterminée de la charge de rupture.

La méthode du calcul est par là réduite à une grande simplicité.

On déterminera, d'après l'équation 75) et par la table XI, la *charge de rupture* pour le prisme donné; on obtient la *charge permise*, en divisant cette valeur par le coefficient de sûreté habituel dépendant de la matière et du degré de solidité auquel on veut arriver.

Si l'on réduit à l'unité carrée de section la charge que doit supporter un prisme de grande longueur, on obtient la *pression moyenne* $\mathfrak{B}_m$, et en employant les notations du n° **36** correspondant aux définitions du n° **8**, nous trouverons

$$\mathfrak{B}_m = \frac{P}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20^a)$$

Combinant cette équation avec l'équation 75), on aura

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad . \quad 76)$$

où la valeur de $\mathfrak{B}_m$ est tirée de la formule ci-dessus 20^a) ou d'une manière plus générale, de l'équation 20) du numéro **8**; le coefficient $\left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right)$ indique de combien la résistance de pièces d'une longueur notable est moindre que celle de prismes fort courts.

37. Nous avons déjà fait remarquer que la longueur L à introduire dans les formules 57) à 75) doit être déterminée par des recherches particulières. — Comme pour la poutre continue, c'est la direction de la tangente à la ligne des fibres invariables qui est ici de haute importance.

Les figures ci-contre montrent la longueur L à introduire, au lieu de la longueur réelle l du prisme.

On pourra par là juger d'autres dispositions, en remarquant toutefois qu'on ne peut pas toujours considérer les extrémités comme étant libres ou encastrées, mais souvent comme étant imparfaitement encastrées.

Fig. 32.

Fig. 33.

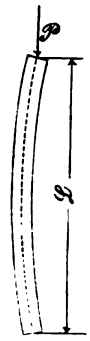


Fig. 34.

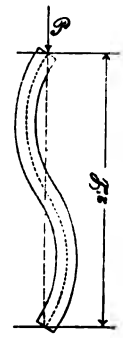
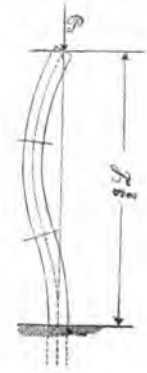


Fig. 35.



CHAPITRE DEUXIÈME.

Résultats d'expériences faites sur la résistance des matériaux employés dans la construction.

§ 4.

Coefficients de résistance.

38. Dans le paragraphe précédent, nous avons développé les formules qui servent à déterminer les tensions, les pressions et les forces rasantes pour des corps prismatiques. — Nous allons donner *la valeur des efforts de traction, de compression et des efforts rasants que l'on peut faire supporter avec sécurité aux différents corps,* ensorte que nous pourrons calculer les dimensions à donner aux corps prismatiques homogènes, par conséquent à toutes les constructions composées de pièces prismatiques, ce qu'on rencontre ordinairement dans toutes les dispositions de ponts métalliques.

La table XII donne la valeur des efforts de traction $\mathfrak{A}$, de compression $\mathfrak{B}$ et de l'effort rasant $\mathfrak{C}$ qu'on peut avec sécurité faire supporter au corps, ainsi que la valeur correspondante des efforts correspondants $\mathfrak{A}_0$ $\mathfrak{B}_0$ $\mathfrak{C}_0$ capables de produire la rupture, le tout exprimé en *kilogrammes par centimètre carré.*

L'effort de traction $\mathfrak{A}$ ou de compression $\mathfrak{B}$ donne la *tension* ou la *pression* qu'un prisme peut supporter et se calcule directement d'après l'équatiou 20). Pour des prismes soumis à un effort de flexion, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ doivent être introduits dans la formule 31), de même $\mathfrak{B}$ dans l'équation 75) pour de longs prismes soumis à la fois à des efforts de flexion et de compression; dans ce dernier cas, la valeur $\frac{\mathfrak{B}}{1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}}$ indique la pression moyenne du prisme.

L'effort rasant est indiqué par l'équation 23) et est contenu dans nos recherches des nos **24** à **28**.

Table XII.

Désignation de la matière.	Charge capable de produire la rupture.	Effort à adopter, tension $\mathfrak{A}$, compression $\mathfrak{B}$, effort rasant $\mathfrak{C}$.	Coefficient de sûreté.
Résistance à la traction.			
Fer forgé de qualité ordinaire	3000	600	5
„ laminé avec soin	3500	700	5
„ de qualité supérieure pour rivure.	4000	800	5
Fil de fer 0,5 á 1 millim. de diamètre . .	8000	1600	5
„ 1 á 3 „ . .	6000	1200	5
„ d'épaisseur plus considérable .	5000	1000	5
„ en faisceau ou câble	3000	600	5
Acier ordinaire	5—8000	1200	5—6
„ de qualité supérieure	8000	1600	5
„ Bessemer de bonne qualité	5500	1000	$5^1/_2$
Fonte de bonne qualité	1100	220	5
„ de qualité supérieure	1500	300	5
Chêne et sapin sec	800	80	10
Résistance à la compression.			
Fer forgé moyen	3000	600	5
„ de qualité supérieure	3500	700	5
Fonte de bonne qualité	7200	1200	6
Acier fondu moyen	12000	1500	8
„ de qualité supérieure	16000	2000	8
Chêne et sapin sec	600	60	10
Résistance au cisaillement.			
Fer forgé moyen	3000	600	5
Fer forgé de qualité supérieure pour rivage	4000	800	5
Fonte de bonne qualité	1100	220	5
Acier fondu moyen	4000	800	5

On pourra, en général, prendre pour des corps prismatiques homogènes, des valeurs pour les *efforts de flexion* égales à celles que nous avons adoptées pour les efforts de traction; on doit toutefois remarquer que des recherches sur des corps soumis à la flexion continuée jusqu'au point de rupture, ont fourni (d'après l'équation 31) un coefficient toujours supérieur à celui obtenu par les recherches directes sur des corps soumis à la traction (d'après l'équation 21), et que la résistance à la traction, pour le moment de rupture, augmente pour des corps rectangulaires jusqu'à $2^1/_2$ fois pour la fonte et $1^1/_2$ fois pour le fer forgé ou pour l'acier, probablement par suite d'un déplacement de la ligne des fibres invariables dans le voisinage du point de rupture.

Pour les efforts qui ne doivent pas être dépassés dans les constructions, le module d'élasticité est constant, d'égale valeur pour la compression et pour la tension, ensorte que la remarque ci-dessus n'est pas valable pour les cas qui arrivent en pratique; si nous l'avons mentionnée, c'est afin d'avertir qu'on ne doit pas employer pour charge de rupture à la traction, celle qu'on a trouvée à la flexion pour des corps prismatiques rectangulaires. —

Les coefficients de sûreté contenus dans la table XII ne sont qu'une moyenne, la qualité des divers matériaux dépendant du lieu de la fabrication, car non-seulement le choix de la matière première, mais bien aussi la méthode de fabrication, soumise à de fréquents changements, influe sur la valeur de la résistance.

La résistance de la matière est aussi dépendante de la manière dont cette dernière est employée; la résistance est amoindrie surtout par des ploiements brusques, principalement par les courbures ou coudes. — Pour l'acier fondu le degré de dureté est important, l'acier dur porte en général mieux que l'acier doux, toutefois au dépens de sa résistance aux chocs; une autre observation, c'est que la résistance à la rupture de lames d'acier, laquelle était de 5500 kilogr. est descendue jusqu'à 3800 kilogr. lorsque les logements des rivets au lieu d'être forés étaient poinçonnés (Recherches dans les usines pour acier et fer forgé de Bolton le Moors, Lancashire). Vu la grande différence entre les coefficients de résistance de l'acier, il faut l'employer avec prudence; nous ne prendrons pour de bon acier Bessemer qu'un effort de 1000 kilogr. par centimètre carré, comme cela a eu lieu pour le pont en arc du quai d'Orsay à l'exposition de Paris en 1867.

Les charges produisant la rupture *du fer laminé* ne diffèrent entre elles que fort peu, et nous prendrons, ainsi que la plupart des ingénieurs, un coefficient de résistance de 6 à 800 kilogr. par centimètre carré, suivant que l'on tient compte ou non, de l'affaiblissement produit par les rivets, etc.

Un résumé fort complet de toutes les recherches faites et des résultats d'expérience pratique, a été donné par le général Morin dans son ouvrage „Leçons de mécanique pratique, résistance des matériaux".

Remarque. **L'observation faite, que souvent du fer grossier cristallin présente un point de rupture voisin de celui d'un fer à grin serré et tenace, a causé en Angleterre des recherches sur la qualité du fer basées sur le travail nécessaire pour obtenir la rupture d'une unité de surface; si nous nommons λ_0 l'allongement d'un prisme de longueur l immédiatement avant la rupture, w sa section transversale, le module de tenacité U du prisme s'exprimera par l'équation**

$$U = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{l} \cdot \mathfrak{A}_0$$

dans laquelle $\mathfrak{R}_0$ indique la charge de rupture par unité carrée; c'est au moyen de cette dernière, ainsi que de l'allongement observé λ_0 immédiatement avant la rupture, que le module de ténacité U a été calculé pour quelques matériaux que nous indiquons ici:

Désignation de la matière.	$\frac{\lambda_0}{l}$	$\mathfrak{R}_0$ en kilogr.	U en kilo et décim.
Fer forgé, cristallin et mauvais	$\frac{1}{60}$	3150	2625
„ très tenace	$\frac{1}{10}$	3780	18900
Fonte, qualité ordinaire	$\frac{1}{600}$	1102	84
Acier Bessemer pour rails, de bonne qualité	$\frac{1}{8}$	5985	37406
Acier fondu de Krupp	$\frac{1}{7}$	6694	47812
Acier, très-dur	$\frac{1}{60}$	6300	5250

U indique les rapports qui existent entre les divers corps relativement aux chocs, ce qui dans bien des cas est utile à connaître, surtout dans les constructions de chemins de fer.

39. Jusqu'ici nous n'avons fait aucune différence entre une charge au repos et une charge en mouvement. En effet, les flèches observées sur de grandes constructions de ponts n'ont montré aucune influence notable de la vitesse avec laquelle la charge passait sur le pont. Il est toutefois certain qu'une influence se fait sentir sur les corps qui sont directement exposés à la charge en mouvement, et il sera prudent d'augmenter les dimensions de ces diverses pièces.

L'influence nuisible des charges en mouvement pourra peut-être se montrer plus tard; c'est en faisant souvent plusieurs essais avec de fortes charges, qu'on obtiendra des données sûres; jusqu'ici, on a supposé que les coefficients de sûreté employés, renferment les garanties désirables contre les affaiblissements produits par des chocs répétés et les variations décroissantes des sections.

M. l'ingénieur Gerber, directeur de la „Eisenbau-Anstalt de MM. Klett et Cie à Nuremberg", dans une publication sur le pont du Rhin à Mayence, a fait la proposition de déterminer l'effort de tension maximum à adopter pour une construction de pont en fer, en le fixant égal à celui qui serait fourni par le poids du pont plus trois fois celui qui résulte de la surcharge variable; pour de bon fer laminé dont nous pouvons prendre 3300 kilogr. par centim. carré comme résistance à la rupture, M. Gerber a pris comme limite de cet effort de tension (c'est-à-dire la tension qui permet d'observer un allongement permanent) 1600 kilogr. par centimètre carré; cette proposition a l'avantage d'obtenir pour de petits ponts, des efforts relativement moindres que pour de

grands ponts, où l'influence de la surcharge est moins considérable.

Si nous supposons les surcharges réduites à l'unité de longueur et que nous désignions par

p le poids du pont,
k celui de la surcharge,
$q = p + k$ le poids total,
$\mathfrak{A}_p$ la tension de la poutre non chargée,
$\mathfrak{A}_k$ la tension produite par la surcharge,
$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$ l'effort total de tension,

la règle ci-dessus indiquée s'exprimera par la formule:

$$\mathfrak{A} + 3\mathfrak{A}_k = 1600 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad . \quad 77);$$

nous avons, d'après cette relation, formé la table suivante XIII:

Table XIII.

$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{k}$	$\mathfrak{A}_k = \frac{1600}{\frac{p}{k} + 3}$	$\mathfrak{A}_p$	$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$
0	0	533	0	533
1/10	1/9	514	57	571
1/7	1/6	505	84	589
1/5	1/4	492	123	615
1/4	1/3	480	160	640
1/3	1/2	457	228	685
2/5	2/3	436	291	727
1/2	1	400	400	800

Nous admettons les résultats de cette table, lesquels du reste coïncident assez bien avec ceux contenus dans notre table XII; car, en prenant le même fer que celui sur lequel est fondée la table XIII, nous obtenons comme effort à faire supporter avec sécurité $\frac{3300}{5} = 660$ kilogr. par centimètre carré et il est certainement rationnel que, pour de faibles portées, on adopte de petits efforts et pour de grandes portées de grands efforts à faire supporter à la matière, lors même que la supposition qui forme la base de l'équation 77) est assez arbitraire.

40. Lorsqu'une pièce de construction soumise à un effort de compression est d'une longueur un peu forte relativement à la plus petite section, elle doit à la fois supporter un effort de flexion et un effort de compression; la *compression maximum* $\mathfrak{B}$ doit être calculée d'après la formule 76) lorsque la pression moyenne $\mathfrak{B}_m$ est connue. D'un autre côté, si $\mathfrak{B}'$ désigne l'effort de compression

à prendre pour la matière employée, la *pression moyenne à adopter* sera exprimée par la formule

$$\mathfrak{B}'_m = \frac{\mathfrak{B}'}{1 + K\,\frac{\omega L^2}{\Theta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76^a)$$

Les valeurs moyennes de $\mathfrak{B}'$ sont contenues dans la table XII, celles de K dans la table XI, et en calculant les moments d'inertie Θ, nous avons obtenu la table suivante XIV, qui, pour une série de sections qu'on rencontre souvent en pratique, renferme les valeurs *des pressions moyennes à adopter*. — Cette pression moyenne $\mathfrak{B}_m$, d'après la définition que nous venons de donner, est égale à la charge par centimètre carré qu'on peut faire supporter avec sécurité à un prisme de grande longueur. — La table contient en outre la fraction $\frac{1}{1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}}$ qui indique la portion de résistance à la compression à introduire dans les calculs des prismes de grandes longueurs.

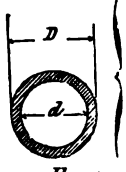
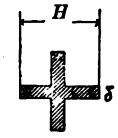
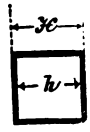
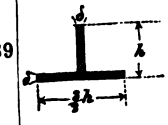
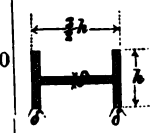
41. La table XIV montre, pour des prismes ou des colonnes *creuses à faibles parois*, une résistance à la compression relativement plus grande que pour des prismes *pleins* rectangulaires ou circulaires, puisque la matière est mieux répartie pour résister aux efforts de flexion. Si toutefois les parois sont trop faibles relativement aux autres dimensions, il en résulte un *voilement* de la faible paroi; dans de pareils cas et même pour des prismes courts, il faut diminuer l'effort à adopter et pour des prismes de fortes longueurs, il faut en outre multiplier cette valeur amoindrie de l'effort à faire supporter avec sécurité, par le quotient

$$\frac{1}{1 + K\,\frac{\omega L^2}{\Theta}}$$

On peut s'opposer à ce voilement en employant des renforts convenables, parallèles ou perpendiculaires à l'axe du corps; les tuyaux en fer forgé par exemple, peuvent être renforcés par des disques qui ne fournissent qu'une légère augmentation de poids.

Lorsque des renforts sont placés dans le sens longitudinal, ils consistent généralement en des cannelures de la paroi, qui augmentent la section de coupe; le calcul des moments d'inertie de sections souvent irrégulières peut être simplifié par l'adoption d'une épaisseur moyenne de la paroi.

Table XIV.

Numéro de la fig.	Rapports $\frac{L}{H}$ ou $\frac{L}{D}$	1	10	20	30	40	50	60
	Fonte, section circulaire pleine	1200 1	857 $\frac{1}{1,4}$	462 $\frac{1}{2,6}$	261 $\frac{1}{4,6}$	162 $\frac{1}{7,4}$	109 $\frac{1}{11}$	78 $\frac{1}{15,4}$
36	 circulaire creuse $\frac{d}{D} = \frac{5}{6}$	1200 1	1071 $\frac{1}{1,12}$	810 $\frac{1}{1,84}$	580 $\frac{1}{2,07}$	407 $\frac{1}{2,94}$	402 $\frac{1}{3,97}$	227 $\frac{1}{5,28}$
	circulaire creuse $\frac{d}{D} = \frac{9}{10}$	1200 1	1081 $\frac{1}{1,11}$	833 $\frac{1}{1,44}$	603 $\frac{1}{1,99}$	435 $\frac{1}{2,76}$	818 $\frac{1}{3,77}$	241 $\frac{1}{4,98}$
37	 en forme de croix $\frac{H}{\delta} = 10$	1200 1	755 $\frac{1}{1,59}$	355 $\frac{1}{3,38}$	189 $\frac{1}{6,35}$	114 $\frac{1}{10,5}$	76 $\frac{1}{15,85}$	54 $\frac{1}{22,4}$
	Fer forgé, section pleine rectangulaire	600 1	550 $\frac{1}{1,09}$	435 $\frac{1}{1,38}$	323 $\frac{1}{1,86}$	237 $\frac{1}{2,53}$	177 $\frac{1}{3,4}$	136 $\frac{1}{4,4}$
	circulaire creuse voir fig. 36. $\frac{d}{D} = \frac{24}{25}$	600 1	566 $\frac{1}{1,06}$	476 $\frac{1}{1,26}$	380 $\frac{1}{1,58}$	294 $\frac{1}{2,04}$	228 $\frac{1}{2,63}$	179 $\frac{1}{3,35}$
38	 carrée creuse $\frac{h}{H} = \frac{24}{25}$	600 1	571 $\frac{1}{1,05}$	500 $\frac{1}{1,20}$	417 $\frac{1}{1,44}$	337 $\frac{1}{1,78}$	270 $\frac{1}{2,22}$	218 $\frac{1}{2,76}$
	en forme de croix voir fig. 37 ci-dessus. $\frac{H}{\delta} = 10$	600 1	504 $\frac{1}{1,19}$	339 $\frac{1}{1,77}$	220 $\frac{1}{2,73}$	147 $\frac{1}{4,08}$	103 $\frac{1}{5,81}$	76 $\frac{1}{7,93}$
39	 $\frac{h}{\delta} = 10$	600 1	545 $\frac{1}{1,10}$	441 $\frac{1}{1,38}$	324 $\frac{1}{1,85}$	238 $\frac{1}{2,52}$	178 $\frac{1}{3,37}$	136 $\frac{1}{4,42}$
40	 $\frac{h}{\delta} = 10$	600 1	517 $\frac{1}{1,16}$	368 $\frac{1}{1,63}$	248 $\frac{1}{2,41}$	171 $\frac{1}{3,51}$	122 $\frac{1}{4,93}$	90 $\frac{1}{6,66}$
	Acier, section pleine rectangulaire	1500 1	1367 $\frac{1}{1,09}$	1087 $\frac{1}{1,38}$	806 $\frac{1}{1,86}$	593 $\frac{1}{2,53}$	470 $\frac{1}{3,4}$	341 $\frac{1}{4,4}$
	Bois, section pleine rectangulaire	60 1	50 $\frac{1}{1,2}$	34 $\frac{1}{1,77}$	15 $\frac{1}{2,72}$	15 $\frac{1}{4,07}$	10 $\frac{1}{5,80}$	8 $\frac{1}{7,90}$

42. Des recherches nombreuses sur *la résistance de la fonte à la compression* ont été publiées par E. Hodgkinson dans son ouvrage intitulé: *Experimental researches on the strength and other properties of cast iron, with the development of new principles, etc. by Eaton Hodgkinson*, 1846 (en partie résumées dans „les Annales des ponts et chaussées, 1855").

Pour des colonnes en fonte à bases plates dont les extrémités sont solidement fixées, M. Hodgkinson donne les formules suivantes:

Soit

L la longueur de la colonne en décimètres,

D le diamètre extérieur,

d le diamètre intérieur de la colonne en décimètres,

la charge en tonnes P_c qui produit la rupture serait:

pour des colonnes pleines

$$P_c = 10{,}38 \frac{D^{3.6}}{L^{1.7}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 78)$$

pour des colonnes creuses:

$$P_c = 10{,}41 \frac{D^{3.6} - d^{3.6}}{L^{1.7}} \quad \ldots\ldots \quad 78^a)$$

Ces formules sont exactes pourvu que la hauteur soit d'au moins 25 fois le diamètre de la colonne; pour des colonnes courtes, Hodgkinson a combiné le poids P_c qui amène la rupture, d'après les équations 78) et 78^a), avec la résistance à la traction et à la flexion; si nous désignons par P_b d'après l'équation 21), le poids qui occasionne la rupture pour des prismes très courts, on aura pour des longueurs un peu plus fortes, toutefois moindres que 25 fois le diamètre:

$$\text{Poids produisant la rupture } P_c' = \frac{P_c\, P_b}{P_c + {}^3/_4\, P_b} \quad . \quad 79)$$

où P_c a été déterminé par l'équation 78) ou 78^a).

Ces formules 78) à 79) coïncident avec les résultats obtenus par l'équation 75) et par la table XIV pour les dimensions ordinairement adoptées dans la construction des ponts; pour des prismes fort longs, on ne peut pas réclamer de coïncidence, la rupture arrive par une déchirure des fibres les plus fatiguées, car pour la fonte, la résistance à la traction n'est que le $^1/_6$—$^1/_5$ de la résistance à la compression.

§ 5.

Construction des assemblages.

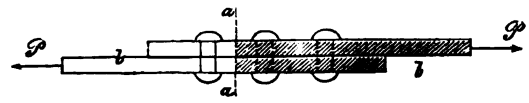
43. La valeur d'une construction dépend essentiellement de la solidité de chacun de ses assemblages; si la destruction provient de la rupture d'un boulon ou d'un rivet, il est évident qu'un surcroît de dimension d'autres parties n'a plus aucune valeur; dès que chaque

partie est calculée séparément, il faut se rendre bien compte de la force de résistance des points d'attache nécessaires et des joints.

Un assemblage peut être formé par un arrangement géométrique de chacune des parties, ainsi que cela a lieu pour beaucoup d'assemblages de bois entre eux, mais le plus souvent on emploiera des pièces intermédiaires, telles que des boulons, rivets, etc... Afin de pouvoir calculer les efforts auxquels sont soumises les pièces intermédiaires qui en relient d'autres, nous nous servirons des considérations du N°. **4**, lesquelles nous conduiront toujours au but proposé; nous ferons une coupe pour laquelle nous écrirons les conditions d'équilibre des forces intérieures et extérieures. Dans la plupart des cas, le calcul sera simple; l'essentiel est de choisir une section convenable.

44. Considérons d'abord le cas où deux feuilles se recouvrant, sont réunies par des boulons, de manière que ceux-ci

Fig. 41.



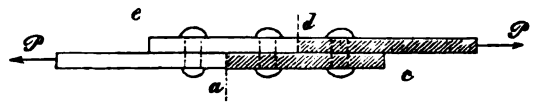
aient à supporter tout l'effort de traction agissant longitudinalement dans les feuilles, ainsi que le représente la figure 41.

Dans une coupe a a perpendiculaire à la force P, cette dernière engendre des efforts de traction, tandis que dans une coupe parallèle à la force, elle engendrera le long de la surface b b un effort rasant, qui, si l'on fait abstraction du frottement, doit être supporté par les surfaces des sections des boulons, soumises à des efforts de cisaillement.

Nous faisons ici une hypothèse, c'est que les 3 boulons, pour autant qu'ils ont le même diamètre, *se répartissent uniformément la charge à transmettre*; cette supposition admet une transmission graduelle des efforts des feuilles à réunir, et comme des variations brusques de tensions cherchent à s'égaliser elles-mêmes, nous sommes autorisés à croire la supposition juste.

Soit, dans la figure 42, une section a d indiquée par la surface hâchée; considérons d'abord la partie e d de la feuille supérieure,

Fig. 42.



la traction qui agit en d doit être en équilibre avec la résistance au cisaillement des deux boulons qui traversent le fragment e d,

cette résistance S est pour chacun des trois boulons, soumis ensemble à l'action de la force P,

$$S = \frac{1}{3} P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

donc la force de traction Z_d (agissant en d) dans la feuille supérieure sera:

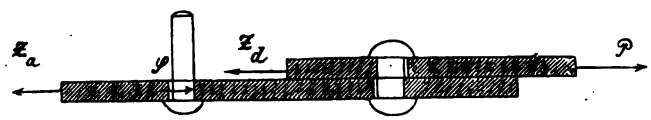
$$Z_d = 2\,S = \frac{2}{3} P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

de même, pour le fragment a c de la feuille inférieure, on aura comme tension Z_a au point a

$$Z_a = 2\,S = \frac{2}{3} P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad III.$$

La somme des forces Z_a, Z_d et S qui agissent parallèlement à P, doit fournir une résultante égale à la force P. La force de résistance S du boulon du milieu agit en sens contraire des forces

Fig. 43.



Z_a et Z_d, ainsi que le montre la fig. 43.; on aura donc comme équation d'équilibre

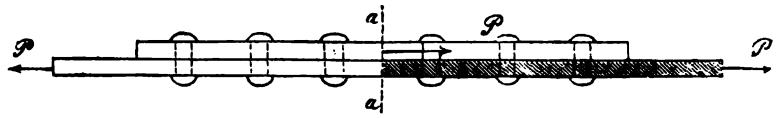
$$P = Z_a + Z_d - S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad IV.$$

ce qu'on voit clairement, en remplaçant les valeurs qui découlent des équations I—III.

Nous trouverons bientôt le point le plus faible de notre assemblage. — En examinant la portion située à gauche, nous voyons que la tension dans la feuille inférieure entre le 1er et le 2ème boulon est $Z_a = \frac{2}{3} P$, entre le 2ème et le 3ème boulon $\frac{1}{3} P$, tandis qu'immédiatement au 1er boulon, la feuille supporte la tension totale P; pour chaque autre point, la section est plus grande ou bien la force à transmettre est moindre, ensorte que c'est au premier boulon extrême que se trouve le point le plus faible de la feuille. — La rupture peut aussi avoir lieu par un cisaillement du boulon; il reste donc à rechercher si ce dernier est plus fatigué par la force $\frac{P}{3}$, que la coupe affaiblie ne l'est sous l'action de la force totale P.

Passons au cas indiqué par la fig. 44, où deux feuilles doivent être assemblées au moyen d'un seul couvre-joint et d'un nombre

Fig. 44.



quelconque de boulons. Nous voyons en considérant la coupe a a, que le couvre-joint en son milieu doit supporter la force totale à transmettre P, et que cette dernière agit encore sur le couvre-joint dans les sections les plus voisines de a a, déjà affaiblies par les boulons, ensorte que ce sont là les deux points les plus faibles du couvre-joint en question. — Les feuilles elles-mêmes travaillent au maximum près des boulons extrêmes; en tant que ces derniers sont situés d'un des côtés du joint, ils ont ensemble à transmettre la force totale P sur le couvre-joint. — Une rupture se produira à la partie faible de la feuille, ou à un boulon, ou enfin au couvre-joint.

Ces *3 possibilités de rupture* peuvent s'exprimer par des formules. Supposons une feuille qui, en largeur, ne possède qu'un seul boulon, ou ce qui revient au même, figurons-nous des feuilles plus larges décomposées en autant de lamelles longitudinales qu'il y a de boulons transversaux et désignons, pour le joint représenté dans la fig. 44 ou 41 par

b la largeur de la feuille ou lamelle à assembler,
b′ la largeur du couvre-joint (s'il y en a un) ou celle de la lamelle,
t l'épaisseur de la feuille,
t′ l'épaisseur du couvre-joint,
d le diamètre d'un des boulons,
n le nombre des boulons successifs, supposés égaux;

de plus nommons:

$\mathfrak{A}$ l'effort de tension maximum dans les feuilles assemblées,
$\mathfrak{A}'$ l'effort de tension maximum dans le couvre-joint,
$\mathfrak{C}$ l'effort rasant dans les boulons, et nous aurons:
pour la feuille à assembler

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\, t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

pour le couvre-joint

$$\mathfrak{A}' = \frac{P}{(b' - d)\, t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 81)$$

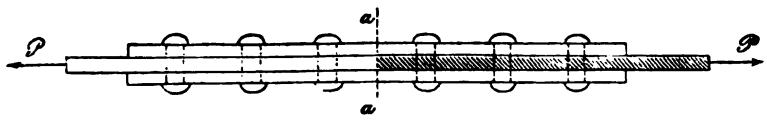
pour les boulons

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

Le point le plus faible de l'assemblage se trouvera à l'endroit où les valeurs de $\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{A}'$ ou de $\mathfrak{C}$ dans une de ces 3 équations seront voisines de l'effort de tension ou de l'effort rasant adopté comme maximum ou bien le dépasseront. Il est clair que l'équation 81) disparaît dans le cas des fig. 41—43. Nous considérerons donc un assemblage de feuilles comme *rationnellement construit*, lorsque l'effort de tension dans la feuille, dans le couvre-joint et dans les boulons est *à peu près égal* à celui qu'on a admis; on pourra toujours sans augmentation notable de matière, donner au couvre-joint et aux boulons des dimensions au moins aussi fortes que celles de la feuille affaiblie.

45. Les équations 80) à 82) subissent un changement dans le cas représenté par la fig. 45, où un couvre-joint se trouve *de chaque*

Fig. 45.



côté de la feuille à assembler; la coupe indiquée par des hâchures ne renferme que des boulons, mais chacun d'eux est coupé deux fois, et par conséquent soumis à *un effort de cisaillement double.*

Si nous désignons par

n le nombre de boulons situés d'un des côtés du joint a a,

S la force de résistance d'un boulon,

P l'effort que le boulon doit transmettre,

on aura

$$S = \frac{1}{2n} P.$$

Si nous conservons les notations du numéro précédent et si nous remarquons que la force P est uniformément répartie sur chacun des couvre-joints, nous aurons:

pour la tension maximum dans la feuille assemblée

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\, t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

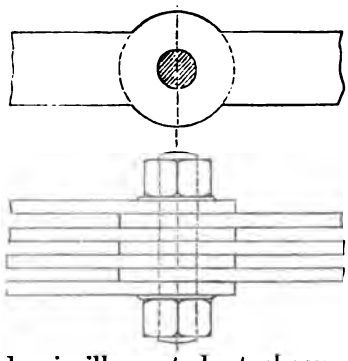
pour la tension maximum dans le couvre-joint

$$\mathfrak{A}' = \frac{\frac{1}{2} P}{(b' - d)\, t'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

pour l'effort rasant maximum dans les boulons

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2n} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 85)$$

Fig. 46.



En comparant cette dernière formule avec l'équation 82, on voit qu'un boulon soumis à un effort de cisaillement double peut supporter une force double de celle que peut transmettre un boulon soumis au cisaillement simple. On rencontre aussi des boulons qui présentent trois, quatre ou plusieurs coupes de cisaillement, suivant le nombre des plaques assemblées, ces boulons sont capables de supporter des charges relativement très grandes. La fig. 46 montre une chaîne articulée qui présente 6 coupes de cisaillement dont chacune n'a conséquemment que le $^1/_6$ de la force à supporter.

46. Les feuilles à assembler ne sont pas toujours de coupe rectangulaire, car on a des cornières, des pièces en forme de ⊤, de double ⊤ ou d'autres; souvent aussi, plusieures pièces s'assemblent en un seul point. Dans ces cas, il faudra viser à ce que les boulons et couvre-joints soient répartis de façon à être soumis d'une manière uniforme à l'action de la force P. Cela étant admis, nommons:

P la force à transmettre,

$\mathfrak{w}$ la section affaiblie aux boulons extérieurs de toutes les pièces de formes quelconques qui se rencontrent sur ce point,

$\mathfrak{w}'$ la section des couvre-joints la plus voisine du joint et affaiblie par les logements des boulons,

n le nombre des sections de boulons d'un des côtés du joint, (donc les boulons soumis à un cisaillement double doivent être comptés pour deux)

d le diamètre des boulons, qu'on suppose le même;

on a:

pour l'effort de tension maximum dans les pièces assemblées,

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{\mathfrak{w}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 86)$$

pour l'effort de compression maximum dans les couvre-joints

$$\mathfrak{A}' = \frac{P}{\mathfrak{w}'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 87)$$

pour l'effort rasant dans les boulons

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{n} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 88)$$

Si les boulons sont d'inégale épaisseur, il faudra introduire dans l'équation 88), pour la valeur $n \frac{\pi}{4} d^2$ la section totale $\mathfrak{w}_n$ de tous les boulons situés d'un même côté du joint et l'on obtient:

$$\mathfrak{E} = \frac{P}{\mathfrak{w}_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 88^a)$$

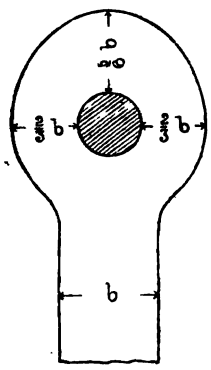
Lorsque les boulons ou les couvre-joints ne seront pas soumis uniformément à l'action de la force, il faudra décomposer la section totale en diverses parties et écrire les conditions d'équilibre pour chacune d'elles. En employant plusieurs fois les équations 86)—88), on atteindra le but qu'on se propose.

47. Lorsqu'une pièce de construction est composée de plusieurs feuilles, la jonction de ces dernières ne se fait généralement pas en un seul point; la section totale ne sera donc affaiblie qu'en partie par l'assemblage des feuilles; mais si la construction est exacte et que les couvre-joints soient suffisants, (voir la fin du N°. **44**) on tiendra compte de l'affaiblissement total de la feuille à assembler, *en déduisant les logements des boulons.*

Si le recouvrement d'un joint est *insuffisant,* on ne devra tenir compte pour la feuille à réunir, que d'une section ayant une résistance égale à celle du couvre-joint ou de la somme des surfaces des boulons respectifs, tandis que pour les autres feuilles, on doit prendre comme section celle qui se trouve près des boulons les plus voisins du joint. S'il *n'existe pas de couvre-joint,* on ne doit pas tenir compte de la feuille interrompue et l'on ne prendra *que la section des autres feuilles, diminuée des logements des boulons.*

48. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons toujours supposé que les feuilles à assembler étaient de même largeur et de même épaisseur, ensorte qu'il devait nécessairement se produire un affaiblissement par l'emploi des boulons; on peut néanmoins contrebalancer cet affaiblissement en *élargissant les extrémités à assembler ou en leur donnant une plus grande épaisseur.* La fig. 46 ci-dessus montre un arrangement pareil, employé ordinairement pour des palans ou chaînes articulées; il faut seulement prendre garde qu'il n'existe nulle part une section plus faible que celle des feuilles à réunir.

Fig. 46ª.



Remarque. Mr. Malberg, après avoir fait des recherches spéciales, conseille de prendre comme largeur de métal autour du boulon au moins les ⅔ de la largeur de la feuille à réunir et aux extrémités, d'augmenter cette largeur jusqu'aux ⅚ de celle de la feuille (voir la fig. 46ª)

49. Lorsque les pièces à assembler doivent résister à un effort de *compression* dans le sens longitudinal, on a, pour des assemblages représentés par les fig. 41—43, une transmission de force analogue à celle de pièces soumises à des efforts de traction; il n'en est pas de même lorsque la jonction est faite bout-à-bout (à l'aide de couvre-joints); lorsque les extrémités sont jointives, la force résultant de la pression peut être transmise directement sans l'intermédiaire du boulon. Cette jonction parfaite n'existe généralement pas, vu les défauts de construction et les changements de température; elle n'a souvent pas lieu du tout, ensorte qu'il faudra le même nombre de boulons que pour le cas où se fait un effort de traction; cette dernière condition devra surtout être remplie pour les constructions où une partie des pièces est soumise alternativement à des tensions et à des pressions. Lorsqu'on peut compter sur une jonction permanente des parties pressées, ainsi que cela a lieu pour des colonnes chargées d'un poids mort, on emploiera le moins de boulons possible, afin de réduire à un minimum l'affaiblissement de la pièce à assembler.

50. L'emploi *des rivets* dans les constructions de ponts étant très-important et vu leur grand nombre, on a fait des recherches minutieuses sur leur mode de résistance.

La résistance des boulons consiste dans la résistance au cisaillement et de plus dans le frottement des parties assemblées les unes sur les autres; une *rivure à chaud* procure par son refroidissement un grand retrait; lors de la construction du pont de Britannia, il a été fait des recherches sur la valeur numérique de ce frottement; à cet effet le logement du rivet était plus grand que son diamètre ensorte que le frottement seul empêchait un glissement des feuilles. On trouva comme *résistance due au frottement* 1200—1300 kilogr. par centimètre carré de section des rivets, tandis que la résistance à la traction du fer employé était de 3776 kilogr. par centimètre carré.

D'un autre côté, on a trouvé qu'une rivûre à chaud ordinaire, faite avec soin, possède une résistance (y compris le frottement) égale à celle de la résistance à la traction, (dans le cas ci-dessus mentionné, 3776 kilogr. par centimètre carré); il est difficile d'indiquer pour quelle valeur le frottement entre dans ces chiffres; on peut toutefois admettre qu'une partie du frottement était vaincue avant le moment de rupture.

Sans vouloir chercher quelle est la part du frottement et du cisaillement dans la résistance totale, il nous suffit de savoir, qu'une rivure à chaud faite avec soin possède une résistance au cisaillement (y compris le frottement) égale à celle à la traction. — Afin de tenir compte des défauts inévitables de fabrication, quelques ingénieurs ne prennent que les $^2/_3$ ou les $^3/_4$ de la résistance à la traction; cette dernière valeur est sûrement trop faible pour une construction soignée, surtout si l'on songe que le fer employé

pour les rivets est ordinairement de qualité supérieure à celle des fers laminés, ensorte que pour une *construction faite avec soin*, on pourra prendre pour résistance $\mathfrak{C}$ des rivets au cisaillement, une valeur égale à celle de la résistance $\mathfrak{A}$ à la traction des feuilles à assembler; du reste il faut laisser à chaque constructeur la liberté de choisir le rapport $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ comme il veut; ce rapport devrait être compris entre $^3/_4$ et 1.

Remarque. Nous entendons par fabrication *soigneuse*, celle dans laquelle les logements des rivets coïncident parfaitement et où les rivets possèdent une épaisseur telle, que par leur refoulement ils remplissent bien le logement.

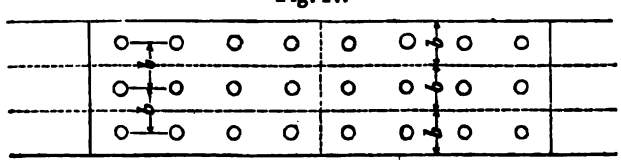
Quelques ingénieurs n'admettent pas la rivure à chaud comme étant bonne; ils supposent que malgré le refoulement, le trou n'est pas bien rempli et ils emploient *à froid des rivets parfaitement tournés* (souvent faiblement côniques) et ils croient ainsi obtenir une meilleure liaison; toutefois il est sûr que la rivure à froid ne procurera pas un frottement aussi grand que la rivure à chaud et que la somme des deux résistances ne dépassera pas la valeur théorique de résistance à la traction (ou résistance théorique au cisaillement); les défauts inévitables de fabrication existent ici tout aussi bien que pour la rivure à chaud, ensorte que nous ne pensons pas qu'on doive attendre une plus grande résistance d'une rivure à froid que d'une rivure à chaud. Nous ne donnons la préférence à une rivure à froid, que lorsqu'une rivure à chaud ne peut être employée commodément et surtout lorsque cette dernière pourrait faillir à cause de la trop grande épaisseur des pièces à réunir.

51. Les formules générales 80)—88) s'appliquent aussi aux assemblages avec des rivets et elles n'ont subi de transformation qu'en ce que nous nous avons pris pour le rapport $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ les limites $^3/_4$ à 1.

Vu le grand nombre de rivets employés dans une construction en tôle, il est important de choisir un rapport convenable entre le diamètre, le nombre et la distance des rivets.

Supposons le cas simple, où les rivets sont placés sur un rang dans le sens longitudinal des tôles à joindre, ainsi que le représente la fig. 47; comme nous l'avons fait dans le développement

Fig. 47.



de nos formules 80)—85), on peut se figurer la tôle formée de lamelles longitudinales de largeur b; nommons de plus

P la force qu'une lamelle doit transmettre,
t l'épaisseur de la tôle à joindre,
n le nombre des rivets successifs,
d le diamètre des rivets,

nous aurons d'après les équations 80) et 82): pour *un couvre-joint*, donc pour des rivets *soumis à un cisaillement simple*,

comme effort de tension dans la tôle assemblée

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b-d)\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

comme effort rasant dans les rivets

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{n}\,\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

et en éliminant P, il s'en suit

$$(b-d)\,t = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\,n\,.\,\frac{\pi}{4}\,.\,d^2 \quad \ldots\ldots \quad 89)$$

tirant la valeur de d de cette équation on a

$$d = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\,.\,\frac{2}{\pi n}\left\{-t \pm \sqrt{\frac{n\pi b t}{\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\right)} + t^2}\right\} \quad 90)$$

Si l'on remplace n par 2 n dans les équations 89) et 90), elles serviront aussi pour *les couvre-joints placés des deux côtés de la feuille*, donc *pour les rivets soumis à un effort de cisaillement double*; on aura dans ce cas

$$(b-d)\,t = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\,2n\,\frac{\pi}{4}\,d^2 \quad \ldots\ldots \quad 86^a)$$

d'où

$$d = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\,.\,\frac{1}{n\pi}\left\{-t \pm \sqrt{\frac{2n\pi bt}{\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\right)} + t^2}\right\} \quad 90^a)$$

Lorsqu'on aura pris une certaine valeur pour $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$, on pourra toujours déterminer b, d ou t d'après les équations 89)—90^a) de façon que les feuilles à réunir et les rivets travaillent avec des efforts égaux; c'est ainsi qu'on obtient *la plus grande économie de métal.*

52. Si dans l'équation 89), le diamètre du rivet est donné, la largeur b sera d'autant plus grande que l'épaisseur t de la tôle est petite, mais plus b est grand pour le diamètre admis, plus la fraction $\frac{b-d}{b}$ s'approche aussi de l'unité et plus l'*affaiblissement de la tôle est petit.*

Diverses circonstances limitent les dimensions à prendre, et en outre $\frac{t}{d}$ ne peut pas être réduit à volonté, vu les considérations suivantes:

Si $\frac{t}{d}$ est très-petit, la surface d t contre laquelle la tige du rivet s'appuie, ne sera plus en état de supporter toute la pression à transmettre; Mr. l'ingénieur Gerber a trouvé par des recherches directes, que la résistance de la surface d t par centimètre carré est de $2^1/_2$ à $3^3/_4$ fois supérieure à celle à la traction; si l'on prend la plus petite de ces valeurs et qu'on admette une résistance à la force rasante (au cisaillement) égale à la résistance à la traction du corps employé, on obtient, lorsque le rivet travaillera à l'effort total:

pour des rivets soumis à un cisaillement simple

$$2{,}5\ d\ t \geqq \frac{\pi d^2}{4}$$

pour des rivets soumis à un cisaillement double

$$2{,}5\ d\ t \geqq 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \qquad \ldots\ 91)$$

D'après cette règle, pour des rivets soumis à un cisaillement double, il serait nécessaire de prendre comme épaisseur de la tôle située entre les rivets, au moins 0,63 fois l'épaisseur de l'un d'eux; mais il semble qu'on obtienne par là une épaisseur plus que suffisante, puisque, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, Mr. Gerber a trouvé en partie une résistance supérieure; il est bon de faire remarquer que lorsque les rivets ne travaillent pas sous l'effort maximum, l'épaisseur de la tôle pourra être réduite dans le même rapport.

Des tôles minces ont l'avantage, que, lorsque plusieurs tôles avec leurs couvre-joints doivent être assemblées, la longueur du rivet n'est pas trop grande; la longueur du rivet entre les têtes ne doit pas dépasser 15—18 centimètres, parce que des rivets plus longs sautent souvent en se refroidissant; en outre, une lésion est aussi à craindre, lors même que la rupture n'est pas visible; l'expérience montre aussi que de trop longs rivets ne se refoulent pas assez bien pour remplir leurs logements en entier. On admet comme règle, que la longueur entre les têtes des rivets doit être, si possible, moins de 10 centimètres et au plus de 15 centimètres.

53. Nous voulons montrer l'application des règles ci-dessus indiquées, pour deux feuilles posées l'une sur l'autre, tout en comparant les assemblages relativement à leurs résistances.

Nous supposerons les feuilles assemblées par des rangées de rivets parallèles à leur dimension longitudinale, de manière que nous pourrons prendre comme largeur des lamelles, la distance des rangées de rivets; nous prendrons

l'épaisseur des tôles $t = 1{,}4$ c.,
la distance entre les rangées de rivets (largeur de la tôle) $b = 15$ c.,
le nombre des rivets successifs $n = 3$,
et dans les formules 89)—90a) $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 1$.

1er cas. Les deux plaques de tôle sont jointes en un même point, ainsi que le montre la fig. 48. — Chacun des couvre-joints

Fig. 48.

employés doit avoir la même épaisseur t que les tôles à assembler; les rivets sont soumis à un cisaillement double; en introduisant la double épaisseur des feuilles dans la formule, le diamètre le plus favorable sera d'après l'équation 90a)

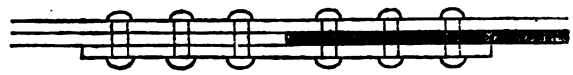
$$d = \frac{2}{6\pi}\left\{ = 3 \pm \sqrt{6 \,.\, \pi \,.\, 8 \,.\, 15 + 3 \,.\, 3}\right\}$$

$$d = 2{,}79 \text{ cent.}$$

L'affaiblissement des feuilles est $\frac{d}{b} = \frac{2{,}79}{15} = \frac{1}{5{,}37}$ et la section affaiblie à introduire dans les calculs $\frac{b-d}{b}\omega = 0{,}814\,\omega$, lorsque ω représente la section des feuilles non affaiblies.

2d cas. Une seule des deux tôles doit être assemblée, ainsi que le représente la fig. 49 et n'est remplacée que par un seul

Fig. 49.



couvre-joint d'épaisseur égale t. — Les rivets sont soumis à un cisaillement simple, la formule 90) donne comme diamètre favorable

$$d = \frac{2}{2\pi}\left\{ - 1{,}5 \pm \sqrt{3\,\pi \,.\, 1{,}5 \,.\, 15 + 1{,}5^2}\right\} \text{ cent.}$$

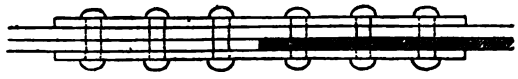
$$d = 2{,}79 \text{ cent.}$$

comme dans le 1er cas; l'affaiblissement des tôles assemblées est de même $\frac{1}{5{,}37}$, et comme les rivets traversent aussi la feuille non interrompue, l'affaiblissement a lieu pour la section totale des deux tôles.

L'expérience montre en outre, que la force P qui agit dans la tôle interrompue n'est pas transmise en entier dans le couvre-joint, mais qu'une partie se reporte dans la feuille non interrompue. Des recherches directes faites lors de la construction du pont de Britannia ont, dans certains cas, montré qu'à peine la moitié de la force se reportait dans le couvre-joint et l'autre moitié dans la feuille non interrompue, qui, vers le joint, aurait ainsi à supporter l'effort $\frac{3}{2}$ P. L'affaiblissement causé par le joint est en raison de cela souvent plus grand que nous ne l'avons calculé ci-devant, et nous en déduisons en même temps, que la *longucur* d'un seul couvre-joint doit être plus grande que celle d'un couvre-joint double, afin d'obtenir une répartition d'efforts plus uniforme.

3me cas. Soit une seule feuille interrompue, ainsi que le montre la fig. 50, mais ayant des couvre-joints des deux côtés. La feuille

Fig. 50.



non interrompue est affaiblie par le passage des rivets exactement comme la tôle interrompue, et doit, à chaque rivet, supporter le même effort que la feuille interrompue aux rivets extrêmes. Les couvre-joints et les rivets remplacent ensemble une couche de tôle, et chacun des couvre-joints a une épaisseur égale à la moitié de celle de la tôle interrompue. Le diamètre le plus favorable des rivets se calcule d'après l'équation 90a).

$$d = \frac{2}{6\pi}\left\{ -1{,}5 \pm \sqrt{6\pi \,.\, 1{,}5 \,.\, 15 + 1{,}5^2} \right\} \text{ cent.}$$

$$d = 2{,}03 \text{ cent.}$$

L'affaiblissement du joint est $\frac{2{,}03}{15} = \frac{1}{7{,}39}$ et la section affaiblie à introduire dans le calcul est $\frac{12{,}97}{15} = 0{,}865$ de sa section non affaiblie ω. Nous ferons remarquer ici qu'il n'est pas permis de prendre comme section de rivet, la moitié de celle employée dans les cas 1 et 2, car, vu l'affaiblissement qui est plus faible pour le cas 3 que pour les deux autres, il faut aussi que les rivets soient relativement plus forts, puisqu'ils ont à supporter le même effort.

Dans un but d'économie, Mr. Stephenson a employé dans la construction du pont de Britannia l'arrangement suivant.

4me cas. Ainsi que le montre la fig. 51, les joints se trouvent les uns après les autres et des couvre-joints sont des deux côtés;

Fig. 51.

les joints sont à une distance telle, qu'un même couvre-joint plus long recouvre les deux joints. — L'épaisseur des couvre-joints est la moitié de celle des tôles et dans une section faite au milieu du couvre-joint, les tôles et les couvre-joints ont à supporter chacun $^1/_4$ de la force totale. L'affaiblissement du joint est le même que dans le 3me cas, mais comparativement à ce dernier, cet arrangement ne demande en couvre-joints et en rivets que les $^3/_4$ du poids; de plus la double couche des tôles se trouve libre de couvre-joints sur une plus grande longueur et est plus propre à la jonction d'autres pièces de la construction.

54. Comme nous l'avons montré dans le numéro précédent, il faut, si possible, employer des couvre-joints des deux côtés. Pour des sections composées de plusieurs parties, il sera souvent difficile de remplir cette condition, surtout pour la jonction des cornières; dans la fig. 52, les couvre-joints des deux côtés servent à la jonction simultanée de deux cornières et dans la

Fig. 52.

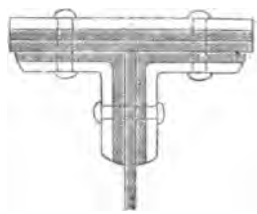


Fig. 53.

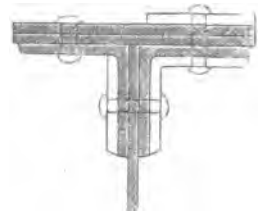
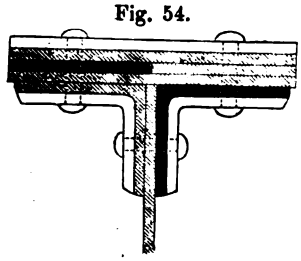


fig. 53, au joint d'une cornière seulement; cette dernière disposition est peu employée à cause de son irrégularité, tandis que la jonction de deux cornières interrompues au même point réclame des rivets relativement plus forts (comme dans le 1er cas du N°. **53**) si l'on n'emploie pas le mode indiqué par la fig. 51; on ne pourra pas employer souvent le mode représenté par la fig. 54 où, par la séparation d'une tôle, l'emploi symétrique de doubles couvre-joints est possible et où les rivets, soumis

Fig. 54.

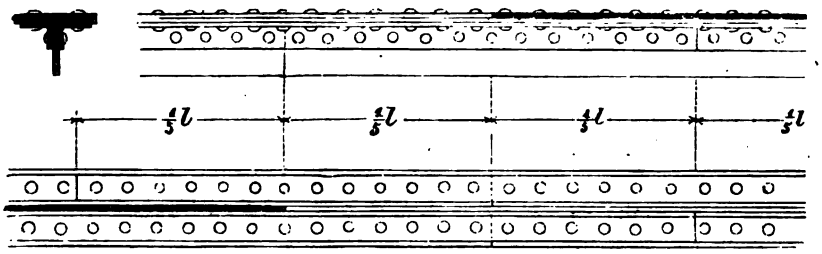


au cisaillement double, n'ont à remplacer qu'une seule couche de tôle. — Cette dernière méthode offre déjà un exemple de six tôles superposées, ce qui demande un grand soin dans l'exécution de la rivure si les tôles sont un peu fortes.

Dans beaucoup de cas, afin de simplifier la construction, on n'emploie pas de couvre-joints et *on laisse les tôles se recouvrir mutuellement, de façon à former des couvre-joints successifs;* il est alors évident que, des m plaques employées, on ne doit en compter que m — 1 qui aient à supporter la force totale, et dans ces m — 1 tôles, il faut encore tenir compte de l'affaiblissement causé par les rivets. — Si l'une des parties est plus forte que les autres, il faudra déduire la section de cette forte pièce de la section entière, à moins que l'on n'emploie des couvre-joints particuliers.

Si les joints varient régulièrement, comme le montre la fig. 55, les rivets situés entre deux joints doivent être suffisants pour rem-

Fig. 55.



placer l'une des tôles interrompues; ces rivets ne doivent être calculés que comme étant soumis *à un cisaillement simple*; cela ne gênera pas, parce qu'on a ordinairement assez d'espace pour placer un grand nombre de rivets l'un après l'autre.

55. Résumant les conditions *pour les assemblages à rivets*, nous *posons* les *règles suivantes*:

1) Lorsqu'un joint est muni d'un couvre-joint qui est assez fort et a un nombre suffisant de rivets, on détermine l'affaiblissement du joint en déduisant de la section entière celle des rivets pour une coupe faite près du bord du couvre-joint.

2) Afin de savoir si les couvre-joints sont assez forts et munis d'un nombre suffisant de rivets,
   pour des tôles avec rivets soumis au cisaillement simple, on fera usage des équations 80)—82),
   pour des tôles avec rivets soumis au cisaillement double, des équations 83)—85),
   pour une section quelconque, des équations 86)—88).

3) Afin d'obtenir un emploi rationnel de métal, pour les joints de feuilles de tôle, on consultera les équations 89) et 90), ou 89ª) et 90ª), et le diamètre des rivets se calculera par les équations 90) et 90ª).

4) Si l'on n'emploie pas de couvre-joints, on laissera les tôles se recouvrir en ne comptant, des m tôles employées, que m — 1 tôles (voir fig. 55) et il faudra déduire de la section totale de ces m — 1 tôles, celle des rivets pour une section faite près du joint considéré.

56. Lorsque plusieurs pièces viennent se rencontrer sur un point, nommé *point d'attache* ou aussi *articulation*, il faudra prendre garde à ce que les dimensions et le nombre des boulons soient calculés exactement suivant la force des pièces elles-mêmes. Lorsque plusieurs tôles devront être jointes sur un seul point, on emploiera ordinairement des couvre-joints communs. — La fig. 56 montre un joint employé dans la construction de ponts en arc en fer forgé; on voit souvent une multitude de rivets sur une seule articulation, puisque la somme des sections de rivets (ceux soumis au cisaillement double comptés à double), doit être au moins égale à celle des pièces assemblées affaiblies par le passage des rivets. Lorsqu'une tige est assemblée à une pièce longitudinale, ainsi que cela a lieu pour les poutres latices (voir fig. 57), il faut que le nombre des rivets de la barre

Fig. 56.

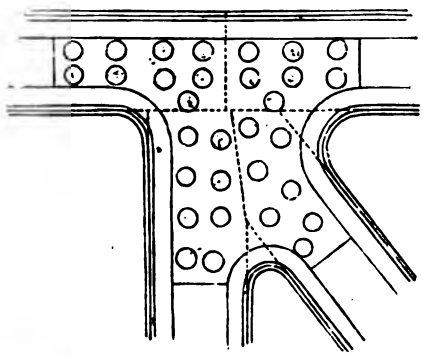
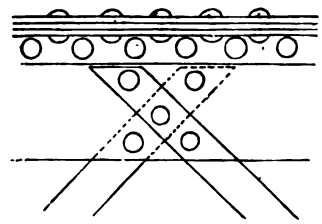


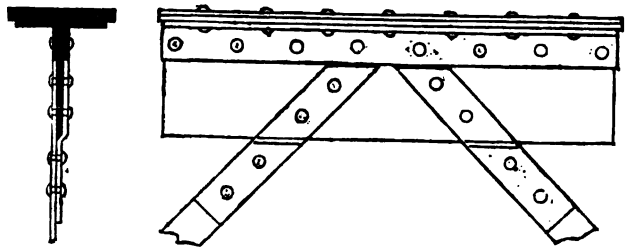
Fig. 57.



à attacher soit suffisant; si les rivets ne sont soumis qu'à un cisaillement simple, comme cela arrive ordinairement, il faudra que la somme des sections des rivets soit au moins aussi grande que celle de la section de la barre affaiblie; on placera alors plusieurs rivets l'un après l'autre; quelques ingénieurs ont aussi formé des

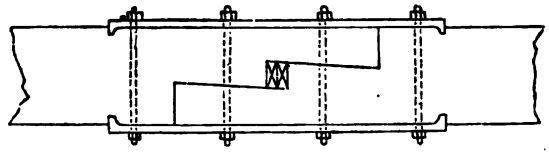
rivets à cisaillement double, en plaçant un couvre-joint de l'autre côté de la table verticale, (voir fig. 58).

Fig. 58.



57. La jonction des *bois* qui doivent supporter des efforts de traction est difficile à obtenir d'une manière convenable; si l'on veut faire usage de plaques en fer pour la jonction, ce n'est ordinairement qu'une partie relativement faible de la section du bois qui sera atteinte par ces plaques et ces boulons; il faudra dans ce cas compter toujours sur le frottement occasionné par les boulons à vis.

Fig. 59.



La fig. 59 montre un assemblage, où l'enchevêtrement du bois est renforcé par des plaques en fer dont les extrémités pénètrent dans le bois; les surfaces obliques des bois ainsi réunis, s'opposent aussi au mouvement et ces deux résistances sont encore augmentées par le frottement des boulons.

CHAPITRE TROISIEME.

Détermination des efforts tranchants et des moments de flexion.

§ 6.

Pièce reposant librement sur deux appuis.

58. Lorsqu'une pièce repose librement sur deux appuis, l'influence des poids sur les culées se détermine d'après la théorie du levier, ensorte qu'on pourra toujours déterminer mathématiquement les pressions sur les appuis, dès qu'on connaîtra la loi suivant laquelle la charge est répartie.

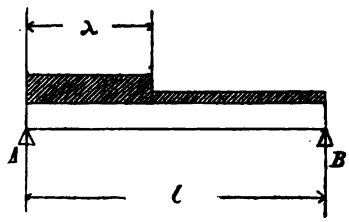
Nous pouvons regarder *le poids propre du pont* comme étant réparti uniformément sur toute la longueur et nous désignerons par p le poids du pont par unité de longueur. — *La surcharge* peut être répartie de diverses manières sur le pont, ou bien être concentrée sur certains points; mais dès qu'il existe plusieurs points chargés, et surtout lorsque, comme pour les grands ponts de chemin de fer, les charges des axes se suivent à des distances déterminées, les influences se combinent de telle façon qu'on peut considérer le pont comme chargé uniformément sur une longueur plus ou moins grande, sans que pour cela on commette une faute sensible; nous ferons à l'occasion une recherche détaillée sur la différence qui existe, en supposant le pont chargé uniformément, au lieu de l'être sur divers points par des poids concentrés.

Cela étant admis, nous supposons la variation de charge occasionnée par un mouvement graduel de la surcharge que nous nommons k par unité de longueur, et qui, partant d'une des extrémités du pont, vient à le couvrir sur toute sa longueur. Il résulte de cette supposition, qu'un élément du pont surchargé contient par unité de longueur le poids $p + k$; cette

charge, répartie sur toute la longueur, représente la charge maximum du pont. — Ce mode de chargement formera en général la base de nos calculs et nous nous servirons moins souvent de charges concentrées.

59. C'est en adoptant une répartition uniforme du poids propre et de la surcharge du pont, que nous pourrons rechercher une série de propriétés importantes des ponts-poutres. — Soit l l'ouverture A B du pont, dont une certaine longueur λ est chargée du poids $q = p + k$, le reste chargé seulement du propre poids p;

Fig. 60.



comme la longueur λ est prise à volonté, le calcul suivant s'applique à tous les cas qui nous occupent. Nous déterminons premièrement les pressions A et B sur les appuis. D'après la théorie du levier et l'équation 4 des équations d'équilibre, nous avons:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{lp}{2} + \lambda k \frac{2l - \lambda}{2l} \\ B &= \frac{lp}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 91)$$

Si nous nous rappelons que pour une section quelconque:

$\mathfrak{V}$ représente la somme algébrique des forces extérieures sur ce fragment (l'effort tranchant),

$\mathfrak{M}$ le moment de ces forces extérieures pris par rapport à cette section x,

nous aurons:

pour la partie chargée la plus voisine de A, en prenant comme origine des coordonnées la section x

$$\mathfrak{V} = A - (k + p)\,x \quad \ldots\ldots \quad 92)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - (k + p)\frac{x^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 93)$$

pour la partie non chargée du côté de B

$$\mathfrak{V} = A - \lambda k - px \quad \ldots\ldots \quad 94)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \lambda k \left(x - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{px^2}{2} \quad \ldots \quad 95)$$

Pour la charge maximum uniformément répartie, les équations 91)—93) peuvent se mettre sous la forme:

$$A = B = \frac{ql}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91^a)$$

$$\mathfrak{V} = A - qx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 92^a)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{qx^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93^a)$$

si nous remplaçons dans cette dernière équation l'abscisse x_1 par sa valeur $x_1 = \frac{l}{2} - x$, donc $x = \frac{l}{2} - x_1$, elle devient:

$$\mathfrak{M} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx_1^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93^b)$$

cette dernière équation est d'un emploi facile, parce que le terme constant $\frac{ql^2}{8}$ qui doit toujours être calculé, peut être considéré comme connu.

Si l'on calcule pour un nombre assez grand de x les efforts tranchants et les moments de flexion correspondants d'après les équations 92)—95), qu'on porte les $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ ainsi calculés comme ordonnées des abscisses x, et qu'on joigne les extrémités de ces ordonnées par une ligne, on obtient ainsi deux courbes qui donnent pour chaque valeur imaginable de x, les valeurs correspondantes de $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ qu'on pourra prendre à l'échelle; la fig. 62 représente les courbes pour une longueur déterminée λ de la surcharge; la courbe des $\mathfrak{V}$ se compose d'éléments rectilignes, dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses est proportionnelle aux charges p et q; — la courbe des $\mathfrak{M}$ se compose d'arcs de paraboles dont les axes sont verticaux et dont les paramètres sont inversement proportionnels aux mêmes charges p et q. Cette remarque nous servira pour la construction des courbes des $\mathfrak{V}$ et des $\mathfrak{M}$, lorsque nous en aurons calculé quelques valeurs d'après les équations 92)—95).

Les équations 92)—95) ne donnent $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ que pour une valeur déterminée de λ; afin de représenter toutes les charges possibles, il nous faut déterminer *les courbes enveloppantes qui renferment toutes les courbes des* $\mathfrak{V}$ *et des* $\mathfrak{M}$. Il faut donc, pour chaque valeur de x, déterminer λ qui donne les plus grandes valeurs pour $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$. Afin de *déterminer le maximum des* $\mathfrak{V}$, remplaçons dans l'équation 94) A par la valeur que donne l'équation 91); nous obtiendrons

$$\mathfrak{V} = \frac{lp}{2} - \frac{\lambda^2 k}{2l} - px$$

Pour une valeur déterminée de x, cette équation fournit une valeur plus ou moins grande, suivant la valeur de λ, pourvu toutefois que λ ne devienne pas plus grand que x. Si λ devenait plus grand que x, on ne devrait plus calculer $\mathfrak{V}$ d'après l'équation 94),

mais d'après l'équation 92) qui montre, que plus A est grand, donc aussi λ (pourvu qu'on ait $\lambda > x$), plus aussi la valeur positive de $\mathfrak{B}$ augmente et la valeur négative diminue pour la section considérée. — Lorsqu'une charge uniformément répartie vient à se mouvoir de A en B, le maximum positif ou le minimum négatif de $\mathfrak{B}$ pour un point quelconque a lieu, pourvu que $\lambda = x$; d'après ce que nous venons de voir, l'équation 94) peut se mettre sous la forme:

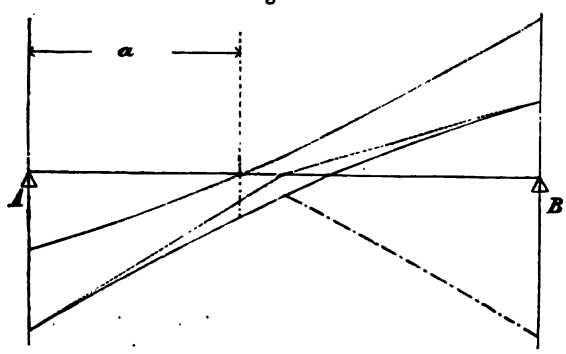
$$\max \mathfrak{B} = \frac{pl}{2} - \frac{kx^2}{2l} - px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96)$$

qui donne la courbe enveloppante pour $\mathfrak{B}$ maximum ou minimum, lorsque la charge se meut de A en B; une seconde courbe symétrique

$$\max \mathfrak{B} = \frac{pl}{2} - \frac{k(l-x)^2}{2l} - p(l-x) \quad . \quad . \quad . \quad 96^a)$$

est la courbe enveloppante des valeurs maxima ou minima de $\mathfrak{B}$, lorsque la charge se meut de B en A. — Nous avons représenté ces deux courbes dans la fig. 61; la plus grande valeur

Fig. 61.



d'une de ces deux courbes donne la valeur du maximum absolu de $\mathfrak{B}$; elle est fournie par l'équation 96) pour $x < \frac{l}{2}$ et par l'équation 96^a) pour $x < \frac{l}{2}$.

Dans la fig. 61, nous remarquons que les deux parties des courbes qui donnent les valeurs absolues maxima de $\mathfrak{B}$ (lesquelles sont représentées au-dessous de l'axe des x par un retournement partiel) sont à peu près des lignes droites; nous aurons donc souvent une exactitude suffisante si, outre les deux valeurs maxima de A et B

$$A = B = (p + k)\frac{l}{2}$$

de différents côtés de l'axe des abscisses; ou bien aussi, lorsque l'une d'elles se trouve elle-même sur l'axe des abscisses; d'où il résulte, que les points où les deux courbes enveloppantes max $\mathfrak{B}$ coupent l'axe des abscisses, sont en même temps *les positions extrêmes* du point $\mathfrak{B} = 0$; si nous désignons par a l'abscisse d'un de ces points d'intersection, on aura d'après l'équation 96) pour $\mathfrak{B} = 0$

$$0 = \frac{pl}{2} - \frac{ka^2}{2l} - pa$$

d'où

$$a = \left\{ -\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2} \right\} l \quad . \quad . \quad . \quad 99)$$

62. Nous donnons dans la planche II (à la fin de l'ouvrage) une représentation graphique des résultats obtenus au moyen des formules 91)—99), en prenant 6 rapports différents $\frac{p}{k} = \frac{\text{poids propre}}{\text{surcharge}}$. Cette représentation graphique contient les courbes enveloppantes max $\mathfrak{M}$ et max $\mathfrak{B}$, ainsi que les valeurs correspondantes $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$.

La courbe enveloppante max $\mathfrak{M}$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\mathfrak{B}$, se trouvent d'après les équations 92[a]) et 93[a]); ces courbes sont les mêmes pour tous les rapports $\frac{p}{k}$; la courbe max $\mathfrak{M}$ est une parabole dont l'ordonnée du sommet est toujours $= 0{,}125\ ql^2$; la courbe des $\mathfrak{B}$ correspondante, se compose de deux lignes droites qui se coupent au milieu de l'axe des abscisses et dont les ordonnées sur les culées sont fixées par les valeurs de $A = B = 0{,}5\ ql$.

Les lignes enveloppantes max $\mathfrak{B}$ se déterminent d'après l'équation 96) ou 96[a]); les valeurs correspondantes $\mathfrak{M}$, d'après les équations 97) et 97[a]); le point où ces courbes atteignent leur maximum, est donné par l'équation 98).

La courbe max $\mathfrak{M}$ et la courbe simultanée $\mathfrak{B}$ peuvent être dessinées de suite d'après les propriétés connues de la parabole et de la ligne droite, la courbe max $\mathfrak{B}$ et celle des $\mathfrak{M}$ simultanées exigent un emploi répété des formules 96)—99) pour les divers rapports $\frac{p}{k}$, et les résultats numériques représentés dans la planche II, sont contenus dans la table XV.

Dans la représentation graphique de la planche II, nous avons porté les valeurs absolues maxima de $\mathfrak{M}$ max et $\mathfrak{B}$ max, ainsi que leurs valeurs correspondantes simultanées $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$; chacune des parties de la construction aura en général à supporter son maximum d'effort pour max $\mathfrak{M}$ ou pour max $\mathfrak{B}$; il pourrait toutefois arriver que deux valeurs quelconques $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$, venant à agir en même temps, chargeassent cette partie d'une manière plus

défavorable; mais le plus souvent, la charge totale uniformément répartie (courbe des $\mathfrak{M}$ max) et la charge partielle parvenue jusqu'au point considéré (max $\mathfrak{B}$), suffisent pour déterminer les dimensions à adopter. Nous montrerons plus tard comment on peut, au moyen des valeurs simultanées $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$, déterminer la force qui agit dans une pièce de la construction; les formules pratiques que nous avons déjà souvent mentionnées, contiennent toujours les grandeurs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$.

Table XV.

Abscisses.		1/4 l	$\mathfrak{B}=0$	1/2 l		Max $\mathfrak{M}$		3/4 l
$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{k}$	$\mathfrak{M}$ d'après l'équation 97)	Absc. x d'après l'équ. 99)	$\mathfrak{B}=\frac{kl}{8}$	$\mathfrak{M}=\left(\frac{p}{8}+\frac{k}{16}\right)$	Absc. x d'après l'équ. 98)	$\mathfrak{M}$ équat. 97)	$\mathfrak{M}$ équat. 97)
1	8	$\frac{ql^2}{0{,}0950}$	$\frac{l}{0{,}500}$	6	$\frac{ql^2}{0{,}125}$	$\frac{l}{0{,}500}$	$\frac{ql^2}{0{,}1250}$	$\frac{ql^2}{0{,}0950}$
3/4	3	$\frac{ql^2}{0{,}0761}$	$\frac{l}{0{,}465}$	$\frac{ql}{0{,}0312}$	$\frac{ql^2}{0{,}1094}$	$\frac{l}{0{,}535}$	$\frac{ql^2}{0{,}1099}$	$\frac{ql^2}{0{,}0880}$
2/3	2	0,0703	0,450	0,0416	1,1041	0,550	0,1052	0,0859
1/2	1	0,0586	0.414	0,0625	0,0937	0,572	0,0962	0,0820
1/3	1/2	0,0469	0,365	0,0830	0,0833	0,608	0,0870	0,0780
1/5	1/4	0,0375	0,302	0,1000	0,0750	0,632	0,0820	0,0750
1/9	1/8	0,0312	0,250	0,1110	0,0694	0,647	0,0784	0,0729

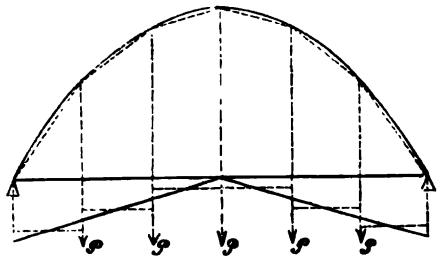
L'emploi le plus simple des représentations graphiques de la planche II, consiste à prendre à l'échelle les valeurs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$; on obtiendrait des valeurs plus exactes, en construisant à une échelle plus grande ces mêmes courbes, au moyen de la table XV, ou des équations 96)—99); les figures de la planche II peuvent servir comme modèle. — Enfin ces représentations graphiques ont pour but de faire mieux comprendre les raisonnements développés ainsi que ceux que nous allons encore faire, et de montrer clairement les résultats des formules et des calculs.

63. Nous voulons rechercher l'influence des charges concentrées et les comparer à celles uniformément réparties.

Si nous supposons d'abord une poutre sans poids, soumise à l'action de plusieurs forces, l'effort tranchant entre chaque point con-

sécutif est constant, ce qui résulte pour ΣY de l'équation 16), donc aussi pour $\mathfrak{B}$; la courbe des $\mathfrak{B}$ se compose ainsi de lignes droites horizontales, d'où il résulte, d'après l'équation 18), que la courbe des $\mathfrak{M}$ est un polygone dont les extrémités sont données par les points où agissent les charges. Lorsque tous les poids P sont de même grandeur — et que la répartition est uniforme sur toute la longueur du pont, le polygone des $\mathfrak{M}$ doit avoir au moins pour chacun des côtés d du polygone, un point commun avec la parabole construite pour la même charge uniforme $\frac{P}{d}$ (voir fig. 63).

Fig. 68.



Plus le polygone a de côtés, c'est-à-dire, plus les points d'application des forces sont voisins les uns des autres, plus aussi le polygone se confondra avec la parabole. Il en est exactement de même, quand on introduit dans le calcul le poids propre uniformément réparti, car les moments respectifs pour le polygone, aussi bien que pour la parabole, s'additionnent, et les côtés des polygones se transforment en arcs de paraboles faiblement courbés.

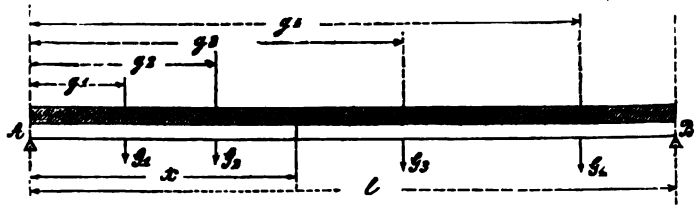
La courbe $\mathfrak{B}$ correspondant au polygone $\mathfrak{M}$ est formée, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, d'une suite de lignes droites horizontales (voir figure 63); pour le cas de charges uniformément réparties, tant en poids qu'en position, la ligne enveloppante des $\mathfrak{B}$ en escalier, devient une droite dont l'inclinaison varie avec la charge totale uniformément répartie; lorsque le nombre des poids augmente, la hauteur des degrés de l'escalier diminue, et se rapproche de la ligne enveloppante; si l'on tient compte du propre poids de la construction, chaque degré de l'escalier s'incline un peu vers l'axe des abscisses, de manière que la tangente trigonométrique se trouve toujours proportionnelle au propre poids de la poutre.

Lorsque les charges sont d'une grandeur et d'une répartition quelconque, les courbes enveloppantes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ sont aussi d'une forme quelconque; mais lorsque les charges peu différentes se suivent à des distances assez rapprochées, ainsi que cela a lieu pour un train de chemin de fer, le polygone des $\mathfrak{M}$ se rapproche d'une ligne

continue, qui n'est autre chose que la parabole des charges uniformément réparties, pour le cas où le pont entier se trouve chargé de lourds véhicules, ou que la courbe de la plus grande charge partielle, lorsque seulement une partie du pont se trouve chargée; on cherchera les positions des véhicules de manière à obtenir les plus grandes valeurs pour max $\mathfrak{M}$, et dans le cas d'une charge partielle, les plus grandes valeurs de max $\mathfrak{B}$.

Afin qu'on puisse calculer les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{B}$ dans le cas de charges concentrées, nous donnons les formules générales suivantes.

Fig. 64.



Soit une travée AB chargée du poids p uniformément réparti, et en outre d'une série de charges concentrées G_1 G_2 G_3 G_4, agissant aux distances g_1 g_2 g_3 g_4; il nous faut encore, dans ce cas, rechercher les pressions sur les appuis; soit l la portée du pont, en employant plusieurs fois la loi du levier, (équation 4) on aura:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{pl}{2} + \frac{(l-g_1)G_1 + (l-g_2)G_2 + (l-g_3)G_3 + (l-g_4)G_4}{l} \\ B &= \frac{pl}{2} + \frac{g_1 G_1 + g_2 G_2 + g_3 G_3 + g_4 G_4}{l} \end{aligned}\right\} \quad 100)$$

pour une coupe quelconque x, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ obtiendront (fig. 59) les valeurs

$$\mathfrak{B} = A - px - G_1 - G_2 \ldots\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 101)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{px^2}{2} - G_1 (x - g_1) - G_2 (x - g_2) \ldots \quad . \quad . \quad 102)$$

Les valeurs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ obtenues par les équations 101) et 102) peuvent êtres comparées aux équations 92)—95) pour des charges uniformément réparties, et l'on pourra comparer leurs valeurs numériques.

§ 7.

Charges et propre poids de poutres reposant librement sur deux appuis.

64. Lorsque les *ponts de chemins de fer* ont une ouverture un peu grande, on prend habituellement une surcharge uniformément

répartie; tandis qu'autrefois une charge de 1 tonne par pied courant anglais, soit 3333 kilogr. par mètre, était suffisante, on est arrivé plus tard (par ex. lors de la construction du pont de Langon en 1856), à prendre ordinairement 4000 kilogr. par mètre, ce qui représente déjà une forte charge; cette augmentation a été nécessitée par l'augmentation des poids des waggons et des locomotives.

Si, pour de petits ponts, on se servait de cette surcharge k uniformément répartie, on obtiendrait des moments de flexion notablement plus faibles que ceux fournis par les équations 100)—102) pour la position la plus défavorable de lourdes locomotives, et nous verrons, dans la suite de nos recherches, que cette surcharge uniforme k qui remplace les charges des essieux d'un train de chemin de fer est inversement proportionnelle à l'ouverture du pont, c'est-à-dire qu'elle est d'autant plus grande, que la portée est faible, et qu'elle n'obtient une valeur constante que pour de grandes ouvertures.

Les trains de marchandises les plus considérables sont remorqués au plus par 3 locomotives; la position la plus défavorable a lieu lorsque deux d'entre elles ont leurs cheminées tournées l'une contre l'autre; pour des ouvertures considérables, on supposera le reste du pont chargé en entier de waggons de marchandises.

Afin de montrer par un exemple le degré d'exactitude qu'on obtient en prenant, au lieu d'un train de chemin de fer, une surcharge également répartie k, nous avons fait un calcul détaillé, indiqué d'une manière graphique dans la planche III. Les dimensions des locomotives, tenders et waggons à marchandises sont renfermées en détail dans la planche III; le poids des locomotives et tenders représente une charge moyenne de 4000 kilogr. et celui des waggons à marchandises, une de 3000 kilogr. par mètre courant.

Nous avons calculé, pour une série d'ouvertures, d'après les équations 101) et 102), chaque $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$ et nous les avons portés à l'échelle dans la représentation graphique de la planche III et cela pour les deux cas prévus, qui correspondent à la charge totale et à la charge d'une moitié du pont; dans les mêmes figures, nous avons aussi reporté les paraboles qui correspondent à la charge uniformément répartie sur l'ouverture ou sur la demi-ouverture du pont et qui doivent remplacer les courbes polygonales calculées d'après l'équation 102); nous en avons fait de même pour les lignes droites correspondantes $\mathfrak{B}$. — Comme exemple, nous donnons dans la table suivante XVI, pour un pont de 15 mètres d'ouverture les résultats obtenus d'après les équations 100)—102).

Table XVI.

Portée 15 mètres. Poids propre du pont, 1075 kilogr. par mètre courant.

Abscisses en mètres.		0	0,5	1,0	2,5	3,5	5,5	5,95	7,5	9,5	11,5	12,5	13,5	15,0
I. Charge produite par le poids propre du pont.	$\mathfrak{V}$	8,05							0					8,05
	$\mathfrak{M}$	0			16,8	21,6	28,0		30,2	28,0	21,6	16,8		0
II. Une locomotive avec la roue motrice du milieu au milieu du pont et au devant une 2de locomotive accouplée.	$\mathfrak{V}$	37,9		36,8 30,8	29,2 23,2		20,0 8,0		5,85 6,15	8,3 20,3			24,6 36,6	38,2
	$\mathfrak{M}$	0		37,4	82,4		147,1		161,0	148,7			55,7	0
III. Une locomotive avec sa roue motrice de devant sur le milieu du pont.	$\mathfrak{V}$	36,65	36,1 30,1			26,9 14,9	12,75 0,75		1,4 13,4					21,45
	$\mathfrak{M}$	0	18,0			103,6	131,2		130,6	101,4	68,3			0
IV. Charge maximum uniformément répartie, de 5730 kilogr. par mètre courant.	$\mathfrak{V}$	43,0							0					43,0
	$\mathfrak{M}$	0		40,0	90,0		149,5		161,0	149,5		90,0	57,9	0
V. Le pont chargé d'un côté, de 7235 kilogr. par mètre, chargé, de l'autre, de son propre poids.	$\mathfrak{V}$	42,7						0	11,55					19,6
	$\mathfrak{M}$	0				95,4		128,0	117,0		62,2			0

Dans cette table, $\mathfrak{V}$ est exprimé en tonnes à 1000 kilogr. et $\mathfrak{M}$ en tonnes et mètres.

Nous avons calculé des tables analogues pour les portées de 7, 10, 15, 20, 30, 40, 60 et 100 mètres. Le résultat des cinq premières est donné dans la représentation graphique de la planche III.

Si l'on examine attentivement cette représentation graphique (planche III), on verra qu'il existe une charge uniformément répartie q ou q′ qui donnera pour le cas de la charge totale, ou lorsque le pont n'est chargé qu'à moitié, des valeurs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{V}$ qui

seront à peu près égales à celles calculées pour les moments de flexion $\mathfrak{M}$ ou les efforts tranchants $\mathfrak{T}$, avec les charges réelles que nous avons admises; les paraboles et lignes droites qui correspondent à ces valeurs de q et q' sont aussi représentées dans la planche III, représentations fondées sur un calcul analogue à celui indiqué dans la table XVI et fait pour les 8 ouvertures ci-dessus indiquées. Les résultats de ces calculs sont contenus dans la table XVII.

Table XVII.

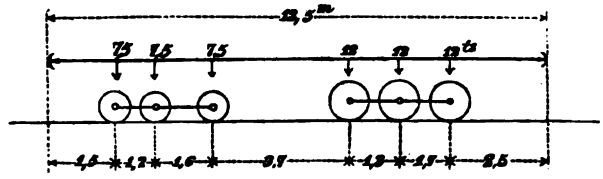
Portées		7 m.	10 m.	15 m.	20 m.	30 m.	40 m.	60 m.	100 m.
poids mort du pont par mètre courant = p.		800 k.	900 k.	1075 k.	1250 k.	1600 k.	1950 k.	2650 k.	4050 k.
Charge maximum sur tout le pont	surcharge variable uniformément répartie = k	6200	5440	4655	4440	4240	4050	4950	3700
	charge maximum uniformément répartie q = p + k	7000	6340	5730	5690	5840	6000	6600	7750
	rapport: $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5,3}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{1,9}$
Charge maximum sur une des moitiés du pont	surcharge variable uniformément répartie = k'	8800	7200	6160	5600	5200	5050	4650	3900
	charge maximum uniformément répartie q' = p + k'	9600	8100	7235	6850	6800	7000	7800	7950
	rapport: $\frac{p}{q'}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6,7}$	$\frac{1}{5,4}$	$\frac{1}{4,25}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{2,75}$	$\frac{1}{2}$

La distance de 2 mètres, d'axe à axe, prise dans le calcul de la table XVII, est notablement plus grande que celle adoptée maintenant pour les locomotives les plus lourdes, employées sur des terrains coupés. — Les locomotives pour trains de marchandises dont on se sert avec beaucoup de succès en Wurttemberg depuis 1865, fournissent un très-bon exemple; les distances d'axe à axe ainsi que les charges des axes de ces machines sont indiquées dans l'esquisse ci-dessous. La table XVII[a] est calculée exactement comme la table XVII; dans la première, les valeurs k et k_1

sont notablement plus grandes pour de petits ponts, que celles indiquées dans la dernière de ces tables.

Table XVII[a]

machine wurttembergeoise pour trains de marchandises.



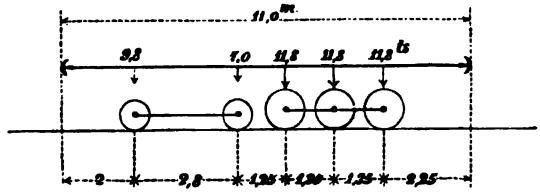
Portées		7 m.	10 m.	15 m.	20 m.	30 m.	40 m.	60 m.	100 m.
poids propre du pont par mètre courant = p.		1000 k.	1100 k.	1275 k.	1450 k.	1800 k.	2150 k.	2850 k.	4250 k.
Charge maximum sur tout le pont	surcharge variable uniformément répartie = k	7350	5760	4730	4660	4455	4410	4000	3700
	charge maximum uniformément repartie q = p + k	8850	6860	6110	6050	6255	6560	6850	7950
	rapport: $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{8,3}$	$\frac{1}{6,2}$	$\frac{1}{4,7}$	$\frac{1}{4,2}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3,0}$	$\frac{1}{2,4}$	$\frac{1}{1,9}$
Charge maximum sur une des moitiés du pont	surcharge variable uniformément répartie = k'	11500	9000	7500	6600	5800	5400	5000	4700
	charge maximum uniformément répartie q' = p + k'	12500	10100	8775	8050	7600	7550	7850	8950
	rapport: $\frac{p}{q'}$	$\frac{1}{12,5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5,5}$	$\frac{1}{4,2}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{2,75}$	$\frac{1}{2,1}$

M. H. Schmidt, ingénieur de la compagnie des chemins de fer de l'Etat autrichien, a publié dans la Bauzeitung de Mr. Förster, les charges maxima produites par les machines-tenders de Engerth et par les machines du Semmering; nous les avons représentées dans les deux tables suivantes; on y a aussi calculé les charges uniformément réparties qui procurent les moments de flexion maxima, fournis par la position la plus défavorable de trois

locomotives, et pour de grandes portées, on a encore ajouté des waggons à marchandises à deux essieux, distants entre eux de 3,5 mètres, d'une longueur totale entre les tampons de 7,25 mètres, et d'un poids de 7800 kilogr. par axe.

Table XVII b

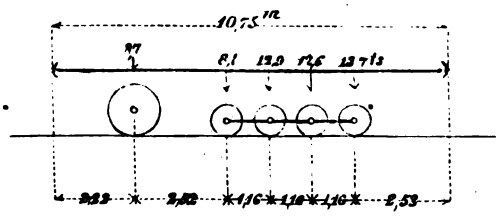
machine-tender Engerth.



Portée	surcharge maximum k par mètre courant de voie	Portée	surcharge maximum k par mètre courant de voie	Portée	surcharge maximum k par mètre courant de voie
1	23520	24	5170	90	3430
2	11760	27	5110	100	3250
3	9410	30	5060	110	3100
4	9700	33	4990	120	2970
5	9030	36	4880	130	2850
6	8540	40	4680	140	2740
8	7455	45	4580	150	2650
10	6770	50	4430	160	2570
12	6010	55	4250	170	2490
15	5470	60	4100	180	2420
18	5460	70	3830	190	2360
21	5300	80	3610	200	2310

Table XVII^c

machine Engerth du Semmering.



Portée	surcharge maximum k par mètre courant de voie	Portée	surcharge maximum k par mètre courant de voie	Portée	surcharge maximum k par mètre courant de voie
1	27440	15	6160	45	5000
2	13720	18	6090	50	4830
3	12970	21	5940	60	4380
4	11900	24	5760	70	4110
5	10970	27	5720	80	3870
6	10260	30	5670	90	3660
8	8730	33	5590	100	3470
10	7690	36	5440		
12	6890	40	5230		

65. Le *poids propre* d'un pont, fourni par la table XVII^a correspond à la formule

$$p = 35\,l + 750 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103)$$

où p est exprimé en kilogrammes et la portée l en mètres. — Il est évident que les coefficients 35 et 750 ne sont que des moyennes, et que les valeurs exactes doivent varier suivant la construction employée, mais il est constaté, par la comparaison faite du poids de beaucoup de constructions de ponts, que ces coefficients sont sensiblement constants pour chaque système ou type de pont; si nous nommons C et F ces coefficients pour la construction employée, on aura en général

$$p = C\,.\,l + F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103^a)$$

Le coefficient F peut être considéré comme représentant le *poids du tablier*, réduit à l'unité de longueur (y compris les entretoises

et longrines-sous-rails), tandis que C . l représente le poids des maîtresses poutres et accessoires, par unité linéaire.

Mr. le conseiller Schwedler, dans un travail présenté à la société des chemins de fer allemands, a donné les résultats suivants *comme propre poids moyen* d'un grand nombre de ponts exécutés pour chemins de fer; il est sous-entendu que le tout est exprimé en mètres et kilogrammes.

Pour des *ponts de construction très-légère*, de 10 à 60 mètres de portée

$$p' = 375 + 25 \,.\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

dans les *avant-projets*, on peut prendre pour des ponts de 10—100 mètres d'ouverture

$$p' = 400 + 30 \,.\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Ces chiffres ne comprennent que le poids de la construction elle-même sans rails, traverses ni madriers dont le poids peut être estimé dans le calcul, comme variant de 3 à 400 kilogr. par mètre courant.

Dans la même relation, il est indiqué comme poids total des ponts à introduire dans les calculs statiques:

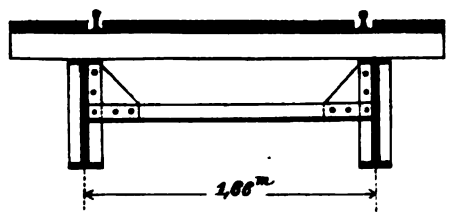
$$p = 800 + 30\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

formule qui coïncide avec II, lorsqu'on ajoute à celle-ci le poids des rails, traverses et madriers.

Cette dernière formule III donne comme propre poids p, pour des ponts jusqu'à 40 mètres d'ouverture, des résultats qui varient peu de ceux pris dans notre table XVII[a].

Les coefficients F de l'équation 103[a]), c'est-à-dire les *poids des tabliers*, peuvent être groupés d'après les types que nous allons donner, en employant le plus possible un arrangement semblable dans les détails.

Fig. 66.



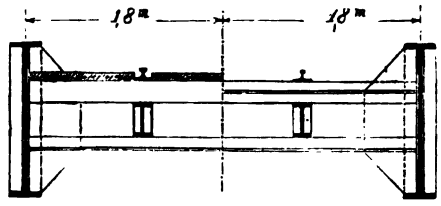
Type I. Ainsi que le montre la fig. 66, les deux files de rails reposent au moyen de traverses ordinaires, immédiatement au-dessus des poutres principales; la distance entre les traverses

est 0,9 M. — Le poids du tablier (sans le contreventement) se compose par mètre courant de

2 files de rails chacune de 40 kilogr. y compris les assemblages par mètre courant	80	kilogr.
$\frac{1,0}{0,9}$ traverse chacune de 2,5 mètres de longueur et de $^{24}/_{15}$ centimètres de section, d'un poids de 67,5 kilogr.	75	„
2,2 mètres carrés de madriers en chêne de 7 centimètres d'épaisseur	115	„
Plaques, boulons etc.	15	„
	275	kilogr.

Type 2. L'arrangement que montre la fig. 67 est toujours possible, lorsque la surface supérieure des rails est au plus à 0,75 mètre

Fig. 67.

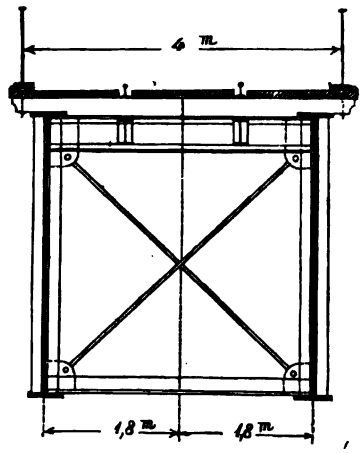


au-dessous de l'arête supérieure des poutres principales; les rails reposent au moyen de traverses sur des *poutrelles* nommées longrines-sous-rails, lesquelles reposent sur les entretoises (ou pièces de pont), que nous supposons à 1,8 mètre de distance les unes des autres; le poids du tablier (non compris le contreventement) par mètre courant se compose de

2 files de rails à 40 kilogr.	80	kilogr.
$\frac{1,0}{0,9}$ traverse, chacune de 2,5 mètres de longueur et de $^{24}/_{15}$ centimètre de section, d'un poids de 67,5 kilogr.	75	„
2,2 mètres carrés de madriers en chêne de 7 centimètres d'épaisseur	115	„
2 longrines-sous-rails, pesant chacune 45 kilogr. par mètre courant, de plus des assemblages	120	„
$\frac{1,0}{1,8}$ entretoises, pesant chacune approximativement 360 kilogr.	200	„
	590	kilogr.

dans lesquels sont compris 320 kilogr. de fer.

Fig. 68.



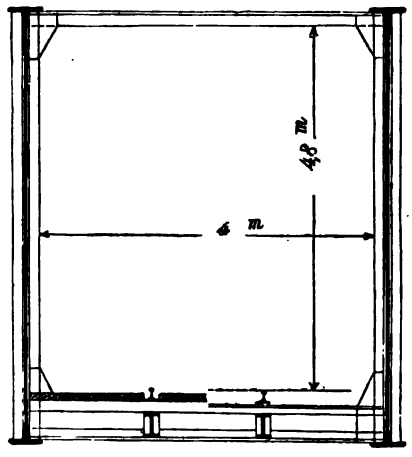
Type 3. La fig. 68 montre le cas où il est nécessaire, pour le même type, d'ajouter un garde-corps, qui augmentera le poids du tablier; les entretoises inférieures sont nécessitées par la hauteur des poutres principales et ne sont pas comprises dans le poids du tablier.

Si nous maintenons la distance de 1,8 mètre entre les entretoises, le poids du tablier par mètre courant sera:

2 files de rails à 40 kilogrammes	80 kilogr.
$\frac{1,0}{0,9}$ traverse, chacune de 4,5 mètres de longueur et $^{24}/_{15}$ centimètre de section, d'un poids de 120 kilogr.	133 „
4,0 mètres carrés de madriers en chêne de 7 centimètres d'épaisseur	210 „
2 longrines-sous-rails	120 „
$\frac{1,0}{1,8}$ entretoise, pesant approximativement 360 kilogr.	202 „
Le garde-corps, par mètre courant d'environ 35 kilogr. donc des deux côtés	70 „
	815 kilogr.

dont 392 kilogr. de fer.

Fig. 69.



Type 4. Lorsque la surface supérieure des rails est à plus de 1,2 mètre au-dessous de l'arête supérieure de la poutre principale, la distance dans œuvre des fermes doit être de 4,0 mètres; la fig. 69 montre un cas dans lequel on a choisi la position la plus basse possible pour le tablier et où, à cause de la grande hauteur des poutres, un second contreventement supérieur est nécessaire. — La hauteur dans œuvre de ce contreventement spécial doit être au moins à 4,8 mètres au-dessus de la surface supérieure des rails; (ces

données sont celles adoptées pour le profil normal, par la société des chemins de fer allemands). — L'écartement des entretoises est encore de 1,8 mètre.

Le poids du tablier (sans le contreventement) se compose de:

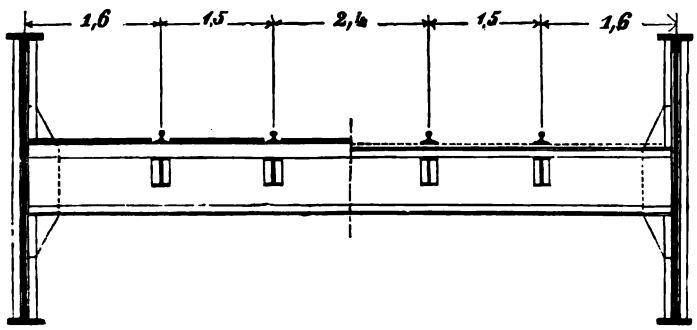
2 files de rails	80	kilogr.
$\frac{1,0}{0,9}$ traverse, chacune de 4,5 mètres de longueur et de $^{24}/_{15}$ centimètre de section, d'un poids de 120 kilogr.	133	»
4,0 mètres carrés de madriers en chêne de 0,7 centimètres d'épaisseur	210	»
2 longrines-sous-rails	120	»
$\frac{1,0}{0,8}$ entretoise, chacune d'un poids d'environ 520 kilogrammes	287	»
	830	kilogr.

dont 407 kilogr. de fer.

Le poids n'aurait pas été augmenté de beaucoup, si l'écartement des entretoises avait été pris plus grand, par exemple de 2,7 mètres; les longrines-sous-rails auraient, il est vrai, à peu près doublé de poids, mais d'un autre côté, le poids des entretoises aurait diminué.

Type 5. La fig. 70 représente un pont à deux voies, où le tablier est situé entre les fermes principales, qui réclament, dans

Fig. 70.



ce cas, un écartement de 8,0 à 8,6 mètres. — La distance des entretoises est supposée de 3,6 mètres et les longrines-sous-rails doivent pouvoir supporter la charge sur cette distance. Le poids du tablier par mètre courant des deux voies, se compose de:

4 files de rails à 40 kilogr.	160 kilogr.
$\frac{1,0}{0,9}$ traverse, chacune de 8,5 mètres de longueur et de $^{24}/_{15}$ centimètre de section transversale, d'un poids de 225 kilogr.	252 „
7,6 mètres carrés de madriers en chêne de 5 centimètres d'épaisseur	400 „
4 longrines-sous-rails, d'un poids de 100 kilogr. par mètre courant	500 „
$\frac{1,0}{3,6}$ entretoise, chacune d'un poids de 1830 kilogr. .	508 „
	1820 kilogr.

donc par mètre courant de simple voie, 910 kilogr. dont 504 kilogr. de fer; suivant les cas spéciaux, on peut diminuer ce poids en donnant une plus grande hauteur aux longrines-sous-rails et aux entretoises, d'où il résulte une diminution de section des nervures.

Pour les types 1—4, on pourra donc prendre la valeur correspondante pour F dans l'équation 103), tant pour le poids total, que pour le poids du fer employé dans la construction du tablier; si nous nommons le premier F, le dernier F_1, nous aurons comme poids moyen d'un pont pour chemin de fer à simple voie

$$\text{poids total} \quad p = 35\,l + F$$
$$\text{poids de fer} \quad p_1 = 35\,l + F_1$$

66. Outre leur propre poids, les *ponts pour routes* ont à supporter celui de lourds chariots, ou d'une foule pressée venant à passer sur le pont.

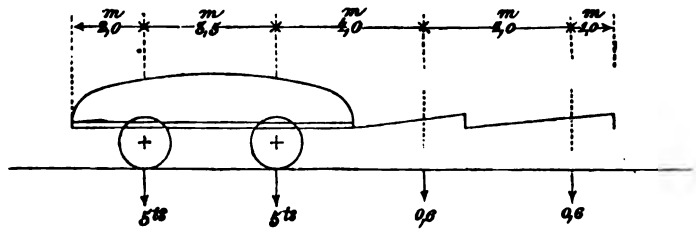
La charge produite par cette foule pressée peut être prise de 360 kilogr. par mètre carré; dans le calcul des dimensions des fermes, on doit toujours compter cette charge pour les trottoirs, mais fort souvent aussi pour la route proprement dite, car les chariots ne fournissent pas la plus grande surcharge à considérer, lorsque la portée est un peu grande.

Pour le calcul des diverses pièces des trottoirs, (consoles, entretoises et plancher), il faut prendre une charge de 560 kilogrammes par mètre carré, laquelle se trouve réalisée, lorsque la foule des personnes est tellement pressée qu'elle ne peut plus avancer.

La charge *des chariots* est celle qui influe sur le tablier proprement dit; il en est de même pour les fermes de ponts à faible ouverture; pour les ponts de portée moyenne, il faut supposer une foule de personnes suivant le chariot.

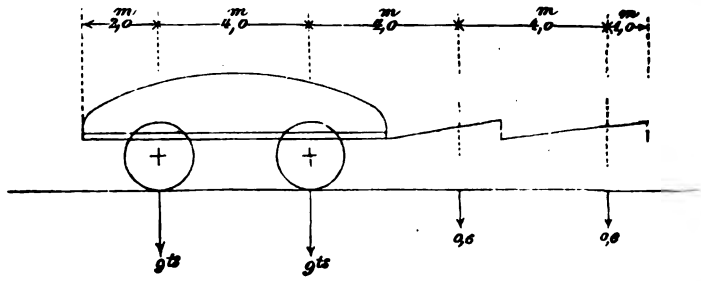
La répartition des charges, pour un chariot de roulage, est indiquée dans la fig. 71, où le poids du chariot est compté à 10000 kilogr. et celui de deux chevaux à 600 kilogr.

Fig. 71.



Pour des routes d'une plus grande importance, surtout dans le voisinage de villes considérables, il faut prendre un poids notablement plus grand, parce que, par exemple, de lourdes machines, des canons, des chaudières à vapeur, viendront peut-être à passer sur le pont; pour ces lourdes charges, il faut prendre 9 tonnes par essieu, comme le montre la fig. 72, qui donne plus de détails

Fig. 72.



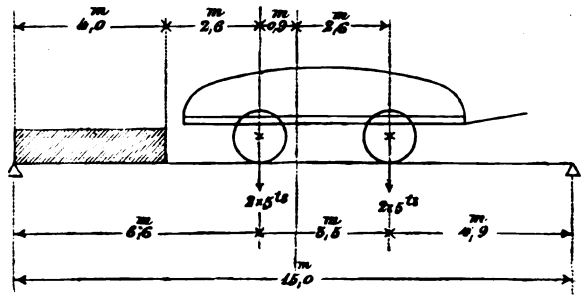
Il n'est pas nécessaire d'admettre que plusieurs de ces *lourds* chariots viennent à passer à la fois sur le pont; ces charges doivent être considérées dans le calcul du tablier et non pour les poutres principales.

Les ponts qui ont à supporter la charge esquissée dans la fig. 72, peuvent être employés pour le passage d'un convoi de chemin de fer remorqué par des chevaux ou par des locomotives dont les roues motrices ne dépassent pas le poids indiqué des roues du chariot.

Suivant les charges, on calculera, pour chaque cas spécial, les moments de flexion maxima $\mathfrak{M}$ d'après les équations 100)—102).

Pour des ponts à chaussée de 5 à 5,5 mètres de largeur, (non compris les trottoirs) il faudra tenir compte du cas où deux chariots ordinaires (fig. 71) viendraient à passer en même temps sur le pont et derrière les chars une foule pressée, ainsi que le représente la fig. 72ª; c'est en prenant ces données comme base,

Fig. 72ª.



que nous avons calculé les valeurs maxima des moments de flexion $\mathfrak{M}$, pour des travées de 7 à 30 mètres et pour une largeur de route de 5,5 mètres; dans la table XVIII, nous donnons la charge k uniformément répartie qui donne les mêmes valeurs pour max $\mathfrak{M}$.

Table XVIII.

Ouverture.	7 m.	10 m.	15 m.	20 m.	30 m.
charge par mètre courant uniformément répartie k	3215	2910	2470	2080	1854

Pour la largeur adoptée de 5,5 mètres, la charge d'une foule pressée est de $5{,}5 \times 360 = 1980$ kilogr. par mètre courant; la table XVIII montre que pour des ponts de plus de 25 mètres d'ouverture, c'est cette charge qu'on devra considérer.

La table XIX donne les surcharges qui doivent être adoptées dans le calcul des fermes principales pour des ponts-routes de 7,5 m. de largeur totale, (y compris 2 mètres pour les trottoirs ou passages de piétons).

Table XIX.

Surcharge à considérer dans le calcul des poutres principales, pour des ponts de route.

Portée	7 m.	10 m.	15 m.	20 m.	au-dessus de 25 m.
charge des trottoirs de 2 m. de largeur, par une foule compacte	720	720	720	720	720
charge de la chaussée proprement dite, de 5,5 mètres de largeur, fournie par 2 chariots ou par le passage d'une foule pressée	3215	2910	2470	2080	1980
total par mètre courant	3935	3630	3190	2800	2700

Lorsque la largeur du pont n'est pas de 5,5 mètres, en consultant la table XIX, on pourra toujours trouver la charge que devra supporter une des poutres principales, charge qui, en général, est proportionnelle à la largeur de la chaussée.

Dans le calcul des pièces du tablier, telles qu'entretoises, poutrelles en travers, il faudra prendre les charges indiquées par les fig. 71 et 72, suivant l'importance de la route; il faut aussi (ainsi que pour les fermes) tenir compte du propre poids du pont, lequel est considérable, si la route est chaussée.

Dans le calcul des pièces pour les trottoirs, il faut prendre 560 kilogr. par mètre carré, ainsi que nous l'avons déjà indiqué. —

67. Afin de pouvoir *comparer les poids propres de ponts de routes*, nous diviserons le poids total, comme nous l'avons fait pour les ponts de chemins de fer, en poids des poutres principales et en poids du tablier, et nous l'exprimerons par la formule

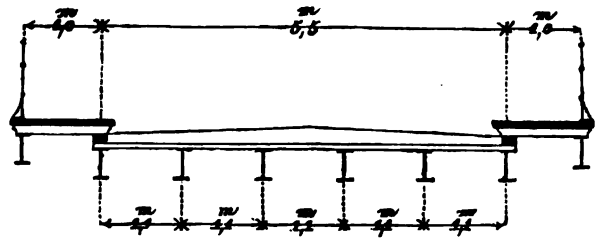
$$p = C \cdot l + F \quad \ldots \ldots \ldots \quad 103^a)$$

l est la portée,
C . l le poids de la construction des fermes et
F le poids du tablier par mètre courant;

il faudra faire une distinction entre les ponts qui portent une route chaussée et ceux qui n'ont que des madriers simples, ainsi que nous allons le montrer dans le résumé suivant de poids de tabliers.

Type 1. La largeur de la chaussée, comme pour tous les cas que nous allons comparer est de 5,5 mètres, celle des deux trottoirs de 1 mètre chacun; la fig. 73 montre que, dans ce système, les poutres sont au-dessous de la voie et assez rapprochées pour qu'il ne soit pas nécessaire d'employer des entretoises.

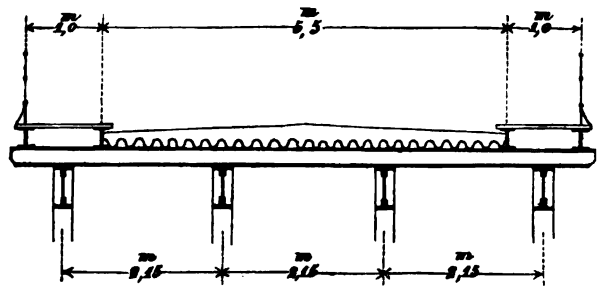
Fig. 73.



Poids du tablier par mètre courant.	a) lors de l'emploi d'une chaussée de 0,2 mètre d'épaisseur et au passage des plus lourds chariots.	b) lors de l'emploi d'une double couche de madriers en chêne et au passage de lourds chariots ordinaires.
Ajustage du tablier et du trottoir	30 kilogr.	30 kilogr.
Garde-corps	70	70
5,5 mètres carrés de tôle ondulée, de 6 millimètres d'épaisseur	330	—
Ensemble poids du fer:	430 kilogr.	100 kilogr.
Longrines en chêne des trottoirs	30	30
Madriers en chêne de 8 c. d'épaisseur, pour trottoirs	120	120
Double couche de madriers, pour la chaussée proprement dite de 14 c. d'épaisseur	—	600
Chaussée de 0,2 mètre d'épaisseur (y compris les longrines bordures)	2400	—
Total:	2980 kilogr.	850 kilogr.

Type 2. Lorsqu'on a une hauteur suffisante et que la portée est grande, on peut employer le système indiqué par la fig. 74, qui permet un nombre restreint de poutres principales.

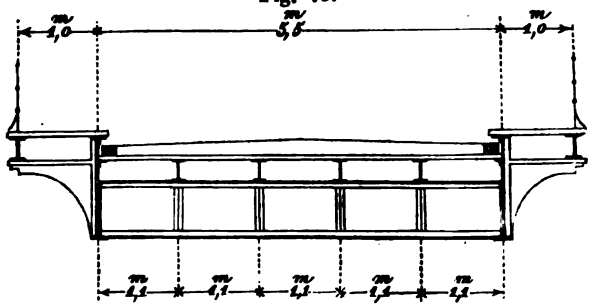
Fig. 74.



Poids du tablier par mètre courant.	a) lors de l'emploi d'une chaussée de 0,½ m. d'épaisseur et au passage des plus lourds chariots.	b) lors de l'emploi de doubles madriers et au passage de lourds chariots ordinaires.
Poutrelles en travers en fer à I, distantes de 1,1 m.	240 kilogr.	210 kilogr.
4 poutres pour trottoirs	140	140
Garde-corps	70	70
Ajustage du tablier	30	30
5,5 m. carrés de tôle ondulée de 6 millim. d'épaisseur	330	—
Ensemble poids du fer:	810 kilogr.	450 kilogr.
Madriers en chêne des trottoirs	120	120
Double couche de madriers en chêne, pour la chaussée proprement dite	—	600
Chaussée de 0,2 mètre d'épaisseur	2400	—
Total:	3750 kilogr.	1170 kilogr.

Type 3. On suppose que la hauteur des deux poutres principales ne doive pas dépasser le trottoir, de manière que ce dernier puisse être assujetti aux poutres elles-mêmes.

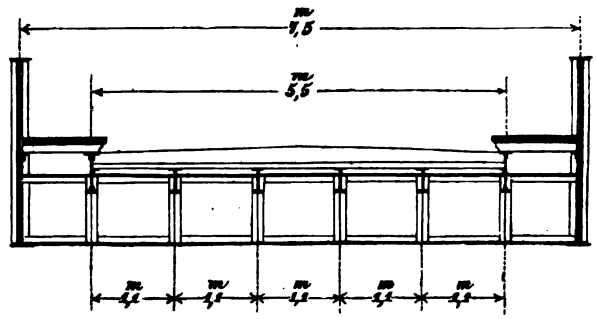
Fig. 75.



Poids du tablier par mètre courant.	a) lors de l'emploi d'une chaussée de 0,2 m. d'épaisseur et au passage des plus lourds chariots.	b) lors de l'emploi de doubles madriers et au passage de lourds chariots ordinaires.
Entretoises, à 3 mètres de distance	300 kilogr.	180 kilogr.
4 longrines-sous-voie, ensemble	340	180
Consoles	120	120
Poutrelles sur les consoles	80	80
Ajustage du tablier	50	50
Garde-corps	70	70
5,5 mètres carrés de tôle ondulée de 6 millimètres	330	—
Ensemble poids du fer:	1290 kilogr.	680 kilogr.
Madriers en chêne pour trottoirs	120	120
Double couche de madriers en chêne, pour chaussée proprement dite	—	600
Chaussée de 0,2 mètre d'épaisseur	2400	—
Total:	3810 kilogr.	1400 kilogr.

Type 3. Lorsque les poutres principales dépassent en hauteur les trottoirs, il est préférable de placer ces derniers aussi entre les fermes.

Fig. 76.



Poids du tablier par mètre courant du pont.	a) lors de l'emploi d'une chaussée de 0,2 m. d'épaisseur et au passage des plus lourds chariots.	b) lors de l'emploi de doubles madriers et au passage de lourds chariots ordinaires.
Entretoises, espacées de 3 mètres	660 kilogr.	400 kilogr.
6 longrines-sous-voie	515	270
Ajustage du tablier et du trottoir	80	80
5,5 mètres carrés de tôle ondulée de 6 millimètres d'épaisseur	330	—
Ensemble poids du fer:	1580 kilogr.	750 kilogr.
Madriers pour trottoirs	120	120
Double couche de madriers, pour la chaussée proprement dite	—	600
Chaussée de 0,2 mètre d'épaisseur	2400	—
Total:	4100 kilogr.	1470 kilogr.

D'après la table XIX nous connaissons le maximum des surcharges, ensorte que nous pouvons déterminer, pour des ponts de 7,5 mètres de largeur, les charges que les poutres principales auront à supporter, et nous pourrons les comparer avec celles contenues dans les tables XVII et XVII[a] pour ponts de chemins de fer, tout en faisant observer que le poids des poutres principales est aussi renfermé dans ces dernières tables.

En se basant sur ces données, on peut calculer le coefficient C du poids de la poutre principale, pour ponts de routes de 7,5 mètres de largeur; il se trouve égal à 42 pour ponts à chaussées et à 28 pour ponts à doubles madriers, ensorte que

le poids moyen p de ponts en fer pour routes de 7,5 mètres de largeur est:

a) lors de l'emploi d'une chaussée de 0,2 mètre d'épaisseur

$$p = 3600 + 42\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 104^a)$$

b) lors de l'emploi de doubles madriers

$$p = 1300 + 28\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 104^b)$$

Si l'on veut estimer le poids du fer p′ (non compris celui de la tôle ondulée ou de quelque autre soutien métallique de la chaussée,) on pourra poser

pour a) $p' = 900 + 42\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 105^a)$

pour b) $p' = 600 + 28\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 105^b)$

et nous renvoyons aux types 1—4, si l'on désire des notices plus exactes sur le poids du tablier.

Si la largeur totale du pont n'est pas de 7,5 mètres, il faudra modifier p (ou p′) suivant les cas qui se présenteront.

§ 8.

Poutres continues.

68. Ainsi que nous l'avons vu dans le N°. **20**, les réactions des appuis (pressions sur les appuis) ne sont pas immédiatement connues pour des poutres continues, puisque les conditions d'équilibre ne suffisent pas à les faire connaître à priori.

Le moyen de trouver ces réactions des appuis a déjà été indiqué d'une manière générale dans le N°. **20**; dans le N°. **21**, nous avons développé la méthode de M. Clapeyron, qui en évitant la double intégration, donne immédiatement les moments de flexion sur les piles par l'élimination de certaines valeurs auxiliaires convenablement choisies.

Lorsque les ouvertures ne sont pas trop faibles (l'emploi de poutres continues n'étant pas à conseiller pour de petits ponts), on peut, comme nous l'avons fait pour une poutre qui repose librement sur deux appuis, envisager le propre poids du pont, ainsi que la surcharge, comme étant uniformément répartis, et nous considérerons une charge totale uniformément répartie sur une travée, les travées pouvant être supposées chargées succesivement, tandis que les autres, ne le sont que de leurs propres poids; non seulement les formules seront beaucoup plus simples — car sans cela le calcul serait très compliqué — mais nous obtiendrons encore une série de positions limites réelles pour les moments de flexion $\mathfrak{M}$ et les efforts tranchants $\mathfrak{B}$, qui représenteront les lignes enveloppantes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$; ces lignes sont indiquées dans la représentation graphique des planches IV et V (à la fin de l'ouvrage) pour 2 et 3 travées, et nous serviront en même temps pour les considérations suivantes. Si nous pouvons prouver que les valeurs

maxima des lignes enveloppantes déterminées coïncident avec les valeurs maxima des courbes qui les remplacent, nous n'aurons pour les longueurs intermédiaires que des différences minimes qui résultent de ce que la courbe remplaçant la courbe enveloppante ne change pas de forme d'une manière continue, mais qu'elle se compose d'une suite de lignes courbes.

Nous considérerons le problème résolu, lorsque nous aurons trouvé les valeurs absolues maxima $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$; nous choisirons entre les valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$, celles qui procurent la plus grande force qui puisse agir sur la pièce de construction qu'on considère, et en général aucune autre charge ne soumettra cette pièce à un effort plus grand.

Afin que le développement soit complet, il faudra encore connaître exactement les limites entre lesquelles les points $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{M}$ peuvent se mouvoir pour chaque travée, c'est-à-dire la distance pour laquelle $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$ changent de signe sous l'action de la charge en mouvement.

Les positions limites $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ ci-dessus indiquées, fournissent en même temps les limites pour les points $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{M} = 0$, car on peut démontrer que les grandeurs maxima et minima des pressions sur les appuis sont comprises dans les cas considérés; comme nous supposons les charges uniformément réparties, les distances maxima et minima des ces points d'intersection seront aussi données.

69. Nommons, pour la poutre continue, ainsi que pour la poutre sur deux appuis

p le propre poids du pont,
k la surcharge,
$q = p + k$ la charge totale,

le tout par unité de longueur d'une travée.

Dans le N°. **64**, nous avons vu que pour des ponts de chemin de fer, on tient compte de l'influence de charges concentrées sur divers points en prenant pour k des valeurs variables suivant l'ouverture; pour les poutres continues qui en général ont des portées assez grandes, la charge k est peu différente du poids des locomotives (ou d'autres véhicules), réduit à l'unité de longueur, et les valeurs k des tables XVII peuvent être acceptées comme étant assez convenables.

Quant aux valeurs k′ des tables XVII, elles ne sont pas nécessaires pour les poutres continues, vu que les charges partielles ont leur plus grande influence lorsqu'une seule ou plusieurs travées sont chargées, cas pour lequel la charge remplaçant le poids des véhicules est identique à celle du pont entièrement chargé.

70. Nous passons au cas *d'une poutre continue sur deux travées.* — La charge simultanée des deux travées soumettra la poutre à l'action d'un effort particulier; mais dès qu'une des ouvertures sera

déchargée, il résultera une flexion de celle qui est encore chargée, et dans cette dernière, sera encore plus grand que lorsque le pont était chargé en entier. Ce fléchissement augmentera toujours jusqu'à ce que l'une des travées soit complétement déchargée.

Une recherche mathématique montre de même que, lorsque la première travée AB seule est chargée, la travée BC étant vide, (fig. 77) $\mathfrak{M}$ atteint son maximum pour AB et son minimum pour BC, et en même temps, que A atteint sa plus grande et B sa plus petite valeur; nous avons l'inverse, lorsque BC est chargée et AB vide. Sur la pile du milieu B, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$ atteignent leurs valeurs maxima lorsque les deux travées sont chargées simultanément.

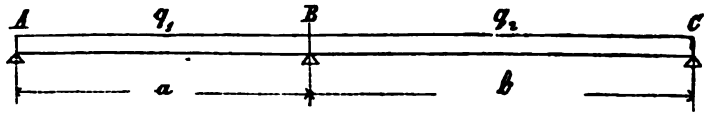
Dans nos calculs, nous étudierons trois cas:

1° Les travées AB et BC chargées,
2° AB chargée, BC vide,
3° AB vide, BC chargée.

D'après les considérations du N°. **68**, les courbes simultanées des $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ représenteront assez exactement, pour ces trois cas, les lignes enveloppantes de tous les $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ possibles. — Mais comme pour chaque pièce de la construction, on ne doit avoir égard qu'aux valeurs simultanées de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$, il faudra dans ce cas prendre avec $\mathfrak{M}$ max, la valeur simultanée de $\mathfrak{B}$ et non celle de max $\mathfrak{B}$.

Un regard jeté sur la planche IV indique encore plus clairement ce que nous venons de dire, tout en montrant aussi la nécessité de l'examen, non seulement de la charge totale, mais aussi de celle d'une seule travée chargée.

Fig. 77.



71. Considérons le cas général, où les deux travées sont inégales et soit AB = a et AC = b, la travée AB chargée par unité de longueur du poids q_1 et BC du poids q_2; tous les appuis sont supposés horizontaux. La détermination des moments de flexion et des efforts tranchants se fera, dans ce cas simple, au moyen du procédé indiqué dans le N°. **20**, à l'aide duquel nous trouvons les réactions inconnues sur les appuis.

Nous prendrons l'origine des coordonnées en B, la direction vers A positive, la valeur EΘ exprimée par s, et nous

supposons que Θ, par conséquent ε, soit une grandeur constante.

D'après l'équation 41), nous aurons pour AB:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = (a-x)^2 \frac{q_1}{2} - A(a-x) \quad \ldots \quad \text{I.}$$

intégrant:

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{q_1 a^2 x}{2} + \frac{q_1 x^3}{6} - \frac{q_1 a x^2}{2} - Aax + \frac{Ax^2}{2} + \varepsilon tg\varphi \quad \ldots \quad \text{II.}$$

où φ indique l'angle que fait la ligne élastique avec l'horizon au point B; une seconde intégration donne:

$$\varepsilon . y = \frac{q_1 a^2 x^2}{4} + \frac{q_1 x^4}{24} - \frac{q_1 a x^3}{6} - \frac{A a x^2}{2} + \frac{A x^3}{6} + \varepsilon tg\varphi . x \quad \text{III.}$$

La constante disparaît, puisque pour $x = 0$ on a aussi $y = 0$.

On trouve de même pour la partie BC, en prenant de nouveau B comme origine des coordonnées:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = (b-x)^2 \frac{q_2}{2} - C(b-x) \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{q_2 b^2 x}{2} + \frac{q_2 x^3}{6} - \frac{q_2 b x^2}{2} - Cbx + \frac{Cx^2}{2} - \varepsilon tg\varphi \quad \ldots \quad \text{V.}$$

$$\varepsilon . y = \frac{q_2 b^2 x^2}{4} + \frac{q_2 x^4}{24} - \frac{q_2 b x^3}{6} - \frac{Cbx^2}{2} + \frac{Cx^3}{6} - \varepsilon tg\varphi . x \quad \text{VI.}$$

Dans l'équation III. pour $x = a$, on a $y = 0$ et dans l'équation VI. pour $x = b$, on a aussi $y = 0$.

Remplaçant ces valeurs dans les équations III. et VI., les multipliant par a ou par b et additionnant les deux équations, on éliminera φ et l'on obtiendra

$$q_1 a^3 + \frac{q_2 b^3}{8} - \frac{Aa^2}{3} - \frac{Cb^2}{3} = 0 \quad . \quad 106^a)$$

A cette équation viennent s'en ajouter deux autres, fournies par les conditions d'équilibre:

$$A + B + C = aq_1 + bq_2 \quad \ldots \quad 106^b)$$

$$\frac{q_1 a^2}{2} - Aa = \frac{q_1 b^2}{2} - Cb \quad \ldots \quad 106^c)$$

Ces 3 équations $106^a)$—$106^c)$ suffisent toujours à déterminer les 3 inconnues A, B et C.

En général, ces équations se simplifient, car ordinairement les travées sont égales, ensorte que pour $a = b$ on obtient:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{b}{16}(7\,q_1 - q_2) \\ B &= \frac{b}{16}\,10(q_1 + q_2) \\ C &= \frac{b}{16}(7\,q_2 - q_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 107)$$

Afin d'obtenir les *pressions sur les appuis*, il faut introduire dans les formules 107) les valeurs qui correspondent aux travées:

1) pour la charge maximum, on placera

$$q_1 = q_2 = (p + k) = q$$

d'après l'équation 107), on aura:

$$A = C = \frac{3}{8}\,qb$$

$$B = \frac{10}{8}\,.\,qb$$

2) la travée AB étant chargée, on placera

$$q_1 = q \text{ et } q_2 = p$$

et nous aurons

$$A = \frac{1}{16}\left(7 - \frac{p}{q}\right) qb$$

$$C = \frac{1}{16}\left(7\,\frac{p}{q} - 1\right) qb$$

$$B = \frac{10}{16}\left(1 + \frac{p}{q}\right) qb$$

3) la travée BC étant chargée, on placera

$$q_1 = p \text{ et } q_2 = q$$

d'où

$$A = \frac{1}{16}\left(7\,\frac{p}{q} - 1\right) qb$$

$$C = \frac{1}{16}\left(7 - \frac{p}{q}\right) qb$$

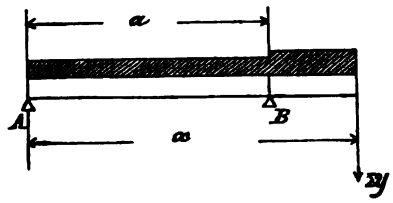
$$B = \frac{10}{16}\left(1 + \frac{p}{q}\right) qb$$

Ainsi donc, dès que nous aurons trouvé A, B et C, on pourra déterminer la valeur de $tg\varphi$ d'après les équations II. ou IV. et en remplaçant cette valeur de $tg\varphi$ dans les équations III. et VI., on obtient *l'équation de la ligne élastique* qui donne le ploiement à chaque point de la poutre.

72. Lorsque les pressions sur les appuis seront connues, on trouvera $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$ par le simple emploi des conditions d'équilibre 2) et 4), que nous écrirons pour le cas qui nous occupe.

Nous placerons l'origine des coordonnées sur la coupe x, (voir fig. 78) et nous nommerons de nouveau q_1 et q_2 les charges sur les deux travées.

Fig. 78.



Pour la partie AB on a:

$$\mathfrak{V} = A - q_1 x \quad \ldots \quad 108)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{q_1 x^2}{2} \quad \ldots \quad 109)$$

pour la partie BC, introduisant une abscisse $x_1 = x - a$:

$$\mathfrak{V} = A + B - q_1 a - q_2 x_1 \quad \ldots \quad 108^a)$$

$$\mathfrak{M} = A(a + x_1) + Bx_1 - q_1 a\left(x_1 + \frac{a}{2}\right) - q_2 \frac{x_1^2}{2} \quad \ldots \quad 109^a)$$

73. Si l'on introduit les diverses valeurs de q_1 et q_2 dans les équations 108)—109^a), ainsi que les valeurs de A, B et C, on obtient, pour une section quelconque x, les valeurs de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{V}$ correspondantes. Dans la planche IV, nous avons porté graphiquement les valeurs $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ comme ordonnées.

Il n'était pas nécessaire de calculer un grand nombre de $\mathfrak{V}$ et de $\mathfrak{M}$ d'après les équations 108)—109^a), car une recherche de ces courbes nous apprend à les construire à l'aide de quelques points seulement.

Nous remarquons d'abord, que les équations 108) et 108^a) représentent des lignes droites, ce qui doit être, d'après l'hypothèse d'une charge uniformément répartie.

L'inclinaison de ces droites sur l'axe des abscisses ne dépend que de la charge, et les tangentes trigonométriques sont directement proportionnelles aux charges q_1 et q_2.

Comme dans une travée unique, de même aussi pour les poutres continues, les courbes des $\mathfrak{M}$ sont des paraboles à axes verticaux, dont le paramètre est directement proportionnel au quotient $\frac{1}{q_1}$ ou $\frac{1}{q_2}$.

Remarque. L'équation de la parabole de paramètre P, est:

$$x^2 = 2Py \left(\text{ou } \frac{x^2}{2P} = y\right)$$

qui par un changement d'origine des coordonnées devient

$$\frac{x^2}{2P} + \alpha x + \beta = y$$

et l'on voit, en comparant cette équation avec les équations 109) et 109ª), que le paramètre P est égal à $\frac{1}{q_1}$ ou $\frac{1}{q_2}$.

Nous remarquons de plus, d'après l'équation 18)

$$\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

que $\mathfrak{M}$ atteint sa plus grande valeur pour $\mathfrak{B} = 0$, c'est-à-dire que le sommet de la parabole $\mathfrak{M}$ est donné par l'abscisse $\mathfrak{B} = 0$.

Ces propriétés des courbes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ simplifient beaucoup leurs constructions, comme nous l'avons déjà fait remarquer; nous ajouterons que nous n'avons à considérer que deux paraboles, dont les paramètres sont proportionnels aux valeurs $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{p}$.

Remarquons, d'après les équations 108) et 108ª), que l'effort tranchant sur les appuis A et C est numériquement égal aux réactions des culées; que, sur la pile du milieu, il a des valeurs différentes suivant le côté qu'on considère, à savoir:
pour la travée AB, (d'ouverture = a)

$$B_a = A - q_1 a$$

et pour la travée BC, (d'ouverture = b)

$$B_b = A + B - q_1 a$$

Puisque $q_1 a$ est plus grand que A, il s'en suit que B_a est négatif, tandis que B_b est positif; leur différence ou bien la somme absolue de ces deux valeurs est égale à la pression sur l'appui B. — Les points x_0 pour lesquels l'effort tranchant est nul, s'obtiennent:
pour la travée AB, d'après l'équation 108)

$$x_0 = \frac{A}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

pour la travée BC, d'après l'équation 108ª)

$$x_0 = a + \frac{A + B - q_1 a}{q_2} \quad \ldots\ldots \quad 111)$$

De même, les équations 109) et 109ª) donnent les valeurs spéciales des moments $\mathfrak{M}$. — D'après les équations ci-dessus 110) et 111), on connaît les abscisses pour $\mathfrak{M}$ max. Il est à remarquer que nous avons introduit pour la travée AB une abscisse $x_1 = x - a$. Pour le point $\mathfrak{B} = 0$, il faudra remplacer dans l'équation 109ª) x_1 par la valeur $(x_0 - a)$ que donne l'équation 111)

$$x_0 - a = \frac{A + B - q_1 a}{q_2}$$

Si nous nommons $\mathfrak{M}_a$ et $\mathfrak{M}_b$ les valeurs maxima de $\mathfrak{M}$ pour les travées AB et BC, nous trouverons en remplaçant les valeurs ci-dessus de x_0 (ou de $x_0 - a$)

pour la travée AB, d'après l'équation 109)

$$\max \mathfrak{M}_a = {}^1/_2 \frac{A^2}{q_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 112)$$

$$\max \mathfrak{M}_b = Aa - \frac{q_1 a^2}{2} + \frac{(A + B - q_1 a)^2}{2\, q_2} = {}^1/_2 \frac{C^2}{q_2} \quad \ldots \quad 113)$$

On pourra facilement transformer ces dernières équations au moyen des équations 106^b) et 106^c).

Sur les culées A et C, on a évidemment $\mathfrak{M} = 0$; pour la pile du milieu, on obtient, d'après les équations 109) et 109^a), la valeur

$$\mathfrak{M}_B = Aa - \frac{q_1 a^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 114)$$

valeur évidemment négative, puisque $A < \frac{q_1 a}{2}$.

Dans la représentation graphique de la planche IV, ainsi que dans la planche II, les valeurs absolues de $\mathfrak{M}$ sont portées au-dessus, les valeurs absolues de $\mathfrak{B}$ au-dessous de l'axe des abscisses.

Pour plus de clarté, on a consigné les résultats du calcul dans la table XX, en prenant comme base divers rapports $\frac{p}{q}$ ou $\frac{p}{k}$.

La première colonne horizontale correspond à la charge maximum sur le pont entier (et lorsqu'on placera $q = p$ pour la charge du poids de la construction); pour chaque rapport $\frac{p}{q}$ et $\frac{p}{k}$, la colonne horizontale correspondante servira à la construction des courbes, lorsqu'une des travées seule est chargée.

74. Prenons le cas de 3 appuis qui ne sont pas dans un même plan; nous emploierons la méthode de M. l'ingénieur Clapeyron, développée dans les N^{os}. **21** et **22**. Nous supposons les travées égales, en outre, les culées de même hauteur, mais la pile du milieu B plus basse, et nous nommerons s cette différence de hauteur.

Nous emploierons cet exemple pour montrer les *avantages* qui résultent d'un abaissement des appuis du milieu, et en même temps pour rechercher l'influence *d'une élévation ou d'un abaissement imprévu* d'un des soutiens.

Les notations sont les mêmes qu'au N°. **22**. Si l'on observe que

$$\mu_1 = \nu_2 = 0$$

(puisque les moments sur les culées sont = 0), de plus que

$$\nu_1 = \mu_2 \text{ et } \psi_1 = \chi_2$$

il s'en suit:

Table XX (pour 2 travées).

		AB chargée (de q).								BC chargée (de q).					
$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	C	Effort tranchant sur la pile du milieu		Abscisse $\mathfrak{B}=0$	max $\mathfrak{M}_a$	$\mathfrak{M}_B$ sur la pile du milieu	A	B	C	Abscisse $\mathfrak{B}=0$	max $\mathfrak{M}_a$	$\mathfrak{M}_B$
					du côté de AB	du côté de AB									
∞	1	$\frac{qb}{0,375}$	$\frac{qb}{1,25}$	$\frac{qb}{0,375}$	$\frac{qb}{0,625}$	$\frac{qb}{0,625}$	$\frac{qb}{0,375}$	$\frac{qb^2}{0,070}$	$\frac{qb^2}{0,125}$	$\frac{qb}{0,375}$	$\frac{qb}{1,25}$	$\frac{qb}{0,375}$	$\frac{b}{0,375}$	$\frac{qb^2}{0,0703}$	$\frac{qb^2}{0,125}$
3	3/4	0,390	1,094	0,266	0,610	0,484	0,390	0,076	0,110	0,266	1,094	0,390	0,354	0,047	0,110
2	2/3	0,395	1,020	0,231	0,605	0,426	0,395	0,078	0,105	0,231	1,020	0,395	0,346	0,040	0,105
1	1/2	0,406	0,937	0,156	0,594	0,343	0,406	0,082	0,094	0,156	0,937	0,406	0,312	0,024	0,094
2/3	2/5	0,412	0,875	0,112	0,588	0,287	0,412	0,085	0,087	0,112	0,875	0,412	0,280	0,016	0,087
1/2	1/3	0,416	0,833	0,083	0,584	0,249	0,416	0,086	0,083	0,083	0,833	0,416	0,250	0,010	0,083
1/4	1/9	0,425	0,750	0,025	0,575	0,175	0,425	0,090	0,075	0,025	0,750	0,425	0,125	0,0015	0,075

Pour la travée AB, d'après l'équation 44)

$$\nu_1 = q_1 - \chi_1 + \varkappa_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$
$$\psi_1 = q_1 - 2\chi_1 + 3\varkappa_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

en outre, d'après l'équation X. du N°. **22**

$$\alpha = \frac{b^3}{24\,E\Theta}\,\chi_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$
$$\alpha_, = \frac{b^3}{24\,E\Theta}\,\psi_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$
$$\mathfrak{M}_1 = {}^2/_8\, b^2\, \nu_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$
$$s = \varkappa_1 \frac{b^4}{24\,E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

de même, pour la travée BC, d'après l'équation 44)

$$o = q_2 - 2\nu_1 - \psi_1 + \varkappa_2 \quad \ldots\ldots \quad \text{VII.}$$
$$\psi_2 = q_2 - 3\nu_1 - 2\psi_1 + 3\varkappa_2 \quad \ldots\ldots \quad \text{VIII.}$$

et d'après l'équation X. du N°. **22**

$$\alpha_{,,} = \frac{b^3}{24\,E\Theta}\,\psi_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IX.}$$
$$-c = \varkappa_2 \frac{b^4}{24\,E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{X.}$$

Dans les 10 équations ci-dessus, nous avons comme inconnues $\alpha\ \alpha,\ \alpha_{,,}\ \mathfrak{M}_1$, et 6 grandeurs auxiliaires $\nu_1\ \chi_1\ \psi_1\ \psi_2\ \varkappa_1\ \varkappa_2$, et l'on pourra trouver chacune de ces 10 valeurs.

Nous obtenons par l'élimination de χ_1 dans les équations I. ou II.

$$2\nu_1 - \psi_1 = q_1 - \varkappa_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XI.}$$

et par l'élimination de ψ_1 dans les équations XI. et VII.

$$\nu_1 = \frac{q_1 + q_2 + \varkappa_2 - \varkappa_1}{4} \quad \ldots\ldots \quad \text{XII.}$$

Si l'on remarque, d'après les équations VI. et X., que

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2$$

il résulte des équations XII. et V. que

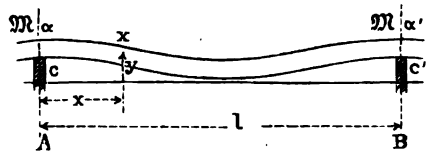
$$\mathfrak{M}_1 = \frac{b^2}{16}(q_1 + q_2 - 2\varkappa_1) \quad \ldots\ldots \quad 115)$$

dans laquelle, d'après l'équation VI. $\varkappa_1 = \frac{24\,.\,s\,.\,E\Theta}{b^4}$; dès que $\mathfrak{M}_1$ sera connu, on trouvera facilement les autres inconnues.

Lorsque les moments $\mathfrak{M}$ sur les piles sont connus pour une travée quelconque, les équations V. à VI. du N°. **21** donnent la

position de la ligne des fibres invariables, donc la flèche au milieu de la travée.

Fig. 79.



Si, dans la fig. 79, nous désignons par

α la tangente de l'angle de l'élastique sur l'appui A,
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ les moments de flexion sur les piles,
q la charge de la travée qu'on considère,
c, c' les hauteurs des appuis au-dessus de l'axe des abscisses,
l la longueur de la travée,

on aura, d'après les équations ci-dessus

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{ql^3}{24\,E\Theta} - \frac{l}{6\,E\Theta}(2\,\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') + \frac{c' - c}{l} \\ y &= c + \alpha x + \frac{qx^4}{24\,E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{l}\right)\frac{x^3}{3\,E\Theta} + \frac{\mathfrak{M}\,x^2}{2\,E\Theta} \end{aligned}\right\} \quad 116)$$

On peut appliquer ces équations d'une *manière tout-à-fait générale* au calcul des flèches de poutres quelconques, en plaçant, suivant les cas, les valeurs c, c' $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M}'$ égales à zéro.

Afin de déterminer $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ pour chaque coupe, il faut calculer les *pressions sur les appuis*. A cet effet, on déterminera l'effort tranchant sur les appuis d'après l'équation II. du N°. **21**. Pour la travée AB, l'effort tranchant sur l'appui A est

$$A_B = \frac{q_1 b}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{b}$$

et si nous remarquons que $\mathfrak{M} = 0$ et que l'effort tranchant A_B est égal à la pression A sur la culée, nous obtiendrons pour cette dernière

$$A = A_B = \frac{q_1 c}{2} - \frac{\mathfrak{M}_1}{b}$$

et remplaçant $\frac{\mathfrak{M}'}{b}$ par sa valeur tirée de l'équation 115)

$$A = \frac{b}{16}(7\,q_1 - q_2 + 2\,\varkappa_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 117)$$

de même, pour la pression sur l'appui C

$$C = \frac{b}{16}(7\,q_2 - q_1 + 2\,\varkappa_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 117^a)$$

Afin de déterminer la pression B, nous avons, d'après l'équation II. du N°. **21**. pour

l'effort tranchant en B du côté de A,

$$B_A = \frac{q_2 b}{2} + \frac{\mathfrak{M}_1}{b} = \frac{b}{16}(9\,q_1 + q_2 - 2\varkappa_1)$$

pour l'effort tranchant en B du côté de C,

$$B_C = \frac{q_1 b}{2} + \frac{\mathfrak{M}_1}{b} = \frac{b}{16}(9\,q_2 + q_1 - 2\varkappa_1)$$

donc la pression sur l'appui en B,

$$B = B_A + B_C = \frac{b}{16}(10\,q_1 + 10\,q_2 - 4\,\varkappa_1) \quad 118)$$

Les pressions sur les appuis étant connues d'après les équations 117)—118), on trouvera les divers $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ pour une section quelconque: d'après les équations 108)—109a), et comme nous l'avons fait dans le N°. **73**, on pourra calculer une table d'après les équations 110)—144) et faire une construction graphique.

Si l'on introduit s, par conséquent $\varkappa_1$ égal à zéro dans les équations 117)—118), ces dernières deviennent égales aux équations 107), puisque tous les appuis sont de même hauteur, c'est-à-dire que l'appui du milieu n'a pas été abaissé; cette preuve montre bien que les équations 117)—118) sont exactes.

75. Les moments de flexion $\mathfrak{M}$, qu'on trouve facilement puisqu'on connaît les pressions sur les appuis, sont particulièrement influencés par l'abaissement de l'appui du milieu.

Combinant les équations 117) et 112) ou 114), (en supposant toujours les travées égales) et conservant les notations précédentes, on obtient:

pour le moment de flexion maximum dans la travée

$$\max \mathfrak{M}_b = \frac{b^2}{512 q_1}(7\,q_1 - q_2 + 2\,\varkappa_1)^2 \quad . \; . \; . \quad 119)$$

Dans cette équation, q_1 indique la charge de la travée AB, q_2 celle de la travée BC, la valeur $\varkappa_1$ est donnée d'après l'équation VI. du N°. **74.**

Moment de flexion sur la pile B

$$\mathfrak{M}_B = \frac{b^2}{16}(q_1 + q_2 - 2\,\varkappa_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 120)$$

L'examen des équations 119) et 120) montre que $\mathfrak{M}_b$ atteint son maximum, lorsque

$$q_1 = q \text{ et } q_2 = p$$

tandis que $\mathfrak{M}_B$ atteint son maximum pour

$$q_1 = q_2 = q$$

d'où il résulte

$$\mathbf{M}\max \mathfrak{M}_b = \frac{b^2}{512\,q}(7\,q - p + 2\,\varkappa_1)^2 \quad . \; . \; . \quad 119^a)$$

$$\mathbf{Max}\ \mathfrak{M}_B = \frac{b^2}{8}(q - \varkappa_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 120^a)$$

On voit que M max $\mathfrak{M}_b$ grandit avec $\varkappa$, c'est-à-dire avec l'augmentation de l'abaissement de la pile du milieu, tandis que max $\mathfrak{M}_B$ diminue en même temps.

L'avantage procuré par l'abaissement d'un appui intermédiaire s'obtient par l'emploi de valeurs d'abaissement s, donc $\varkappa$, de manière que les valeurs maxima des équations 119^a) et 120^a) soient égales; on obtiendra ainsi la plus petite valeur pour le maximum absolu de $\mathfrak{M}$. — Prenant les valeurs

M max $\mathfrak{M}_b$ (d'après l'équation 119^a) et
Max $\mathfrak{M}_B$ (d'après l'équation 120^a)

égales, on obtient:

$$\varkappa_1 = \frac{q}{2}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\,\frac{p}{q}}\right) \quad . \; . \; . \quad 121)$$

et remplaçant $\varkappa_1$ par sa valeur tirée de l'équation VI. du N°. **74**; on aura

comme abaissement le plus favorable de l'appui du milieu B

$$s = \frac{b^4 q}{48\,E\Theta}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\,\frac{p}{q}}\right). \; . \quad 122)$$

E est le module d'élasticité du corps employé, Θ le moment d'inertie de la section considérée.

Si $\varkappa_1$ est calculé d'après l'équation 121) pour une poutre donnée, les pressions sur les appuis et les moments de flexion principaux s'obtiendront d'après les équations 117)—120). Max $\mathfrak{M}_B$ est donné directement d'après l'équation 120^a).

Nous avons calculé de cette manière la table suivante XXI pour une série de ponts en fer forgé de diverses portées; les rapports $\frac{p}{q}$ sont tirés de la table XVII (voir N°. **69**); on connaît donc l'abaissement le plus favorable de la pile du milieu, ainsi que la valeur max $\mathfrak{M}_B$.

Ce dernier dépend surtout du moment d'inertie de la section. Nous posons par exemple la condition, que la plus grande tension $\mathfrak{A}$ des nervures ne doive pas dépasser 600 kilogr. par cent. carré.

Si les nervures sont égales, d'après l'équation 31)

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{H}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad I.$$

Prenant en outre comme hauteur de la poutre $^1/_{10}$ de la portée b, on obtient par un remplacement dans l'équation 122)

$$s = \frac{q\,b^2}{7200 \text{ max } \mathfrak{M}_B}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\,\frac{p}{q}}\right) \quad II.$$

Ces valeurs s sont contenues dans la table XXI.

76. La table XXI montre clairement que des abaissements assez petits suffisent pour procurer de grandes différences dans les moments de flexion.

On peut produire l'abaissement non seulement en construisant la pile du milieu un peu moins haute que les culées, mais aussi en élevant le milieu de la poutre continue immédiatement au-dessus de la pile.

Il est évident que la poutre doit avoir la forme voulue avant qu'elle ait fléchi sous son propre poids; on peut du reste calculer la flexion résultant du propre poids de la poutre et la comparer à la flexion réelle observée.

Table XXI (pour 2 travées).

	Portée	7 m.	10	15	20	30	40	60	100
	Rapport $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5,8}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{1,9}$
Pour une même hauteur des appuis.	max $\mathfrak{M}$ dans une travée.	qb^2 0,0927	0,0919	0,0906	0,0897	0,0882	0,0868	0,0851	0,0819
	max $\mathfrak{M}$ sur la pile du milieu.	qb^2 0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
Abaissement le plus favorable de la pile du milieu.	x_1	q 0,1792	0,1842	0,1913	0,1965	0,2050	0,2137	0,2239	0,2430
	max $\mathfrak{M}$ simultanément sur la pile du milieu et à l'intérieur de la travée.	qb^2 0,1026	0,1019	0,1011	0,1004	0,0994	0,0983	0,0970	0,0946
	Abaissement s de la pile du milieu.	cent. 0,340	0,502	0,753	1,087	1,718	2,483	3,848	7,523

Le calcul des forces qui agissent dans une poutre continue est singulièrement altéré par une faute de hauteur même assez

petite des soutiens; la table XXI donne une preuve de ces changements pour les faibles différences des abaissements.

Pour de petites portées, il ne faut employer la continuité des poutres qu'en portant une grande attention sur les éventualités que nous venons de mentionner.

Pour de grandes ouvertures, où l'abaissement le plus favorable des appuis intermédiaires est toujours de quelques centimètres, on peut obtenir par un travail soigné et avec une sécurité suffisante le profil longitudinal (rectiligne ou surélevé) qu'on veut donner aux nervures; un abaissement des piles intermédiaires aurait surtout l'avantage qu'on pourrait choisir les dimensions de la poutre beaucoup plus égales, de manière à remplir le mieux possible les conditions demandées par la ligne élastique.

Chaque abaissement volontaire ou causé par une faute de hauteur des appuis intermédiaires, pour autant qu'on sera bien sûr de sa grandeur, peut être étudié au moyen des formules précédentes; on calculera d'abord x_1 d'après l'équation VI. du N°. **74** et l'on trouvera tout de suite avec les équations 117)—120) les pressions sur les appuis et une série de moments de flexion.

Des différences involontaires peuvent aussi avoir lieu en ce que les appuis intermédiaires se trouvent *plus élevés* que les culées; le moment sur les piles intermédiaires, déjà grand de lui-même, sera encore augmenté. Ceci est, comme on l'a dit, une des raisons principales qui doivent faire rejeter la poutre continue pour de faibles portées, car la plus petite faute de hauteur des appuis peut avoir des conséquences imprévues et fâcheuses.

77. Pour *trois travées*, nous aurons aussi le cas le plus défavorable, lorsqu'une ou plusieurs travées seront chargées sur toute leur longueur d'un poids k uniformément réparti. Nous ferons aussi plusieurs hypothèses, savoir:

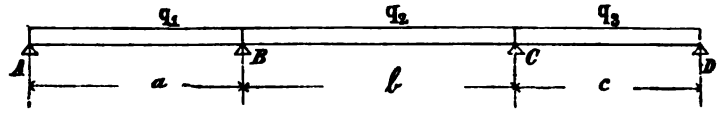
1) Les 3 travées chargées du poids total $q = p + k$.
2) La travée du milieu BC chargée, les autres ne l'étant pas.
3) Une des travées extrêmes chargées.
4) Une seule travée extrême et celle du milieu chargées simultanément.
5) Les deux travées extrêmes chargées.

Nous supposons d'abord tous les appuis à la même hauteur, mais les travées inégales, savoir AB = a, BC = b, CD = c et chargées des poids q_1 q_2 q_3 indiqués par la fig. 80.

Comme dans le N°. **71** pour deux travées, nous écrirons l'équation 41) pour chacune des 3 travées, intégrerons deux fois et écrirons en outre les deux équations des conditions d'équilibre pour les forces extérieures, et nous obtiendrons les équations

d'équilibre nécessaires à la détermination des pressions sur les appuis.

Fig. 80.



1) Partie AB, origine des coordonnées en A,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Ax - \frac{q_1 x^2}{2}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{Ax^2}{2} - \frac{q_1 x^3}{6} + \text{Const.} = \frac{Ax^2}{2} - \frac{q_1 x^3}{6} + \varepsilon tg\varphi - \frac{Aa^2}{2} + \frac{q_1 a^3}{6}$$

dans laquelle φ indique l'angle de tangence.

$$\varepsilon . y = \frac{Ax^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24} + x\left(\varepsilon tg\varphi - \frac{Aa^2}{2} + \frac{q_1 a^3}{6}\right)$$

pour $x = a$ on a $y = 0$ donc

$$\varepsilon tg\varphi = \frac{Aa^2}{3} - \frac{q_1 a^3}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \text{I.}$$

2) Partie BC, origine des coordonnées en B,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = A(a + x) + Bx - q_1 a\left(\frac{a}{2} + x\right) - \frac{q_2 x^2}{2}$$

et en intégrant

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = Aax + \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^2}{2} - \frac{q_1 a^2 x}{2} - \frac{q_1 a x^2}{2} - \frac{q_2 x^3}{6} + \varepsilon tg\varphi$$

$$\varepsilon . y = Aax^2 + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^3}{6} - \frac{q_1 a^2 x^2}{4} - \frac{q_1 a x^3}{6} - \frac{q_2 x^4}{24} + \varepsilon tg\varphi . x.$$

pour $x = b$ on a $\frac{dy}{dx} = tg\varphi_1$ lorsque φ_1 représente l'angle en C

$$\varepsilon . tg\varphi_1 = Aab + \frac{Ab^2}{2} + \frac{Bb^2}{2} - \frac{q_1 a^2 b}{2} - \frac{q_1 a b^2}{2} - \frac{q_2 b^3}{6} + \varepsilon tg\varphi \quad \text{II.}$$

de plus pour $x = b$ on a $y = 0$ donc

$$0 = \frac{Aab}{2} + \frac{Ab^2}{6} + \frac{Bb^2}{6} - \frac{q_1 a^2 b}{4} - \frac{q_1 a b^2}{6} - \frac{q_2 b^3}{24} + \varepsilon tg\varphi \quad . \quad \text{III.}$$

3) Pour la partie BC, origine des coordonnées en D,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Dx - \frac{q_3 x^2}{2}$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = Dx^2 - \frac{q_3 x^4}{6} - \varepsilon tg\varphi_1 - \frac{Dc^2}{2} - \frac{q_3 c^3}{6}$$

$$\varepsilon . y = \frac{Dx^3}{6} - \frac{q_3 x^3}{24} + x\left(\frac{q_3 c^3}{6} - \frac{Dc^2}{2} - \varepsilon tg\varphi_1\right)$$

comme ci-dessus pour $x = c$ on aura $y = 0$ donc

$$-(\varepsilon tg\varphi_1) = \frac{Dc^2}{3} - \frac{q_3 c^3}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV.}$$

Outre les équations I. à IV. nous avons encore les conditions d'équilibre pour les forces extérieures

$$A + B + C + D = q_1 a + q_2 b + q_3 c \quad \ldots \text{V.}$$

et enfin l'équation 4)

$$0 = A(a + b) + Bb - Dc$$
$$- q_1 a\left(b + \frac{a}{2}\right) - \frac{q_2 b^2}{2} + \frac{q_3 c^2}{2} \quad \ldots\ldots \text{VI.}$$

Ces 6 équations serviront à déterminer les 6 inconnues A, B, C, D, $\varepsilon tg\varphi$ et $\varepsilon tg\varphi_1$. Nous trouvons

$$A = \frac{q_1(8a^2bc + 6a^2b^2 + 3a^3b + 6a^3c) - q_2 b^3(2c+b) + q_3 c^3 b}{16abc + 16a^2c + 12ab^2 + 16a^2b} \quad 123^a)$$

$$B = \frac{6q_1 a^2 b + 4q_1 ab^2 + q_2 b^3 + 3q_1 a^3 - A(12ab + 4b^2 + 8a^2)}{4b^2} \quad 123^b)$$

$$C = q_1 a + q_2 b + q_3 c - (A + B + D) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 123^c)$$

$$D = \frac{A(a + b) + Bb - q_1 a\left(b + \frac{a}{2}\right) - \frac{q_2 b^2}{2} + \frac{q_3 c^2}{2}}{c} \quad \ldots \quad 123^d)$$

Pour des poutres et des charges symétriques où $a = c$ et $A = D$, $B = C$, ces équations se simplifient et deviennent

$$A = \frac{q_1(3a^3 + 6a^2 b) - q_2 b^3}{8a^2 + 12ab} \quad \ldots\ldots \quad 124^a)$$

$$B = \frac{2aq_1 + bq_2}{2} - A \quad \ldots\ldots\ldots \quad 124^b)$$

Remplaçant dans les équations 123) et 124) les charges q_1, q_2, q_3 qui agissent sur les travées AB, BC et CD et qui représentent soit le propre poids p du pont, soit la charge totale q, on trouvera les pressions sur les appuis pour les positions les plus défavorables des surcharges.

78. Lorsque les pressions sur les appuis A, B, C et D sont trouvées d'après les équations 123) ou 124), les équations 108) à 109) serviront à obtenir les valeurs $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{M}$, parce qu'on peut remplacer la troisième travée par la première, en changeant seulement le système des coordonnées.

Les considérations du N°. **73** s'appliquent aussi au cas que nous considérons (en regardant toujours la troisième travée comme étant la première); en particulier les équations 112)—114) sont

valables pour 3 travées, aussi bien que pour 2 seulement, quand on a remplacé les pressions A, B, C et D sur les appuis par leurs valeurs tirées des équations 123) et 124). — Le moment max $\mathfrak{M}_a$ pour la travée AB, obtient sa plus grande valeur lorsque les deux travées extrêmes sont chargées, (car dans ce cas A a sa plus grande valeur) et si nous avons a = c (ce que nous supposerons toujours dans la suite), on obtient pour ce maximum

$$\max \mathfrak{M}_a = \frac{A^2}{2q} = \frac{1}{2p}\left[\frac{qa^2(3a+6b) - pb^3}{8a^2+12ab}\right]^2 \quad 125)$$

L'abscisse de ce moment max $\mathfrak{M}_a$ est donnée par l'équation 110).

Le moment de flexion pour la travée du milieu atteint son maximum lorsque cette travée seule est chargée, les travées extrêmes n'agissant que par leur propre poids (deuxième hypothèse du N°. **77**); si l'on introduit les pressions correspondantes sur les appuis dans l'équation 113), on obtient comme moment de flexion max pour la travée du milieu (et cela toujours au milieu de la travée)

$$\max \mathfrak{M}_b = \frac{qb^2(2a+b) - 2pa^3}{16a+24b} \quad \ldots\ldots \quad 126)$$

Les équations 114), 123^a) et 123^b) montrent également que le moment sur l'appui du milieu est maximum, lorsque la travée extrême attenante et celle du milieu sont chargées du poids q (quatrième hypothèse); on obtient comme moment de flexion maximum sur la pile du milieu B

$$\max \mathfrak{M}_B = \frac{q(2a^3b + 2a^4 + 2ab^3 + b^4) - pa^3b}{32ab + 16a^2 + 12b^2} \quad 127)$$

Nous avons calculé plus haut pour les 2ème, 4ème et 5ème hypothèses du N°. **77**, les valeurs maxima des moments, (toujours en supposant les travées extrêmes d'égale portée) et on s'assurera facilement que la 1ère et la 3ème hypothèse ne donneront pas de plus grandes valeurs. Pour la 3ème hypothèse, on le voit directement en examinant l'équation qui donne la pression A sur la culée; plus q_3 est petit, plus aussi cette pression est petite. Nous pouvons donc considérer ce cas comme étant renfermé dans les autres.

La première hypothèse est aussi représentée dans la planche V, puisqu'elle correspond au cas de la charge uniformément répartie, mais elle ne fournit pas de valeurs maxima.

Les autres valeurs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$ nécessaires pour notre construction, s'obtiennent par les équations 107) et 109), plus spécialement encore par les équations 112)—114).

79. Nous posons, comme problème, d'avoir à choisir le rapport $\frac{a}{b}$ de manière que l'angle fait par l'axe neutre avec l'horizon soit nul sur la pile du milieu pour le cas d'une répartition uniforme de la charge.

On obtient d'abord, lors de la charge partielle, que les angles de tangence sur les piles sont les plus petits possibles; il nous semble en outre qu'on obtient un avantage de construction, en ce que les efforts tranchants et les moments de flexion se groupent d'une façon assez symétrique autour des piles.

Afin de trouver le rapport $\frac{a}{b}$, on placera dans l'équation I. du N°. **77** $tg\varphi = 0$; puisque $q_1 = q_2 = q_3$ on a

$$0 = \frac{A a^2}{3} - \frac{q a^3}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

pour cette charge, d'après l'équation 124[a])

$$A = q \frac{(3a^3 + 6a^2b - b^2)}{8a^2 + 12ab} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

d'où résulte

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

$\frac{a}{b}$ est compris entre $^4/_5$ et $^5/_6$ et dans l'exemple suivant, nous prendrons $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$.

Après avoir déterminé les pressions sur les appuis, d'après l'équation 123) ou 124) pour les 1ère, 2ème, 4ème et 5ème hypothèses du N°. **76**, on calculera chaque $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{V}$ d'après les équations 108)—109) et 112)—114); nous donnons les résultats de ces calculs dans la table XXII. En portant enfin les $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{V}$ comme ordonnées des abscisses correspondantes, nous obtiendrons les représentations graphiques de la planche V.

80. La représentation graphique de la planche V montre la variation des moments calculés d'après les équations 125)—127), pour les travées, ou sur la pile du milieu. — Afin de comparer les rapports $\frac{a}{b}$, nous calculerons ces 3 valeurs maxima pour divers cas, en prenant comme base le rapport $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$. Les résultats sont contenus dans la table XXIII.

Table XXII. $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	max $\mathfrak{M}$ pour AB	$\mathfrak{M}$ pour B	max $\mathfrak{M}$ pour BC	Abscisse $\mathfrak{M}=0$ pour AB	Abscisse $\mathfrak{M}=0$ pour BC
I. La travée du milieu seule chargée.								
∞	1	$\frac{bq}{0,297}$	$\frac{qb}{1,003}$	$\frac{qb^2}{0,044}$	$\frac{qb^2}{0,0824}$	$\frac{qb^2}{0,0430}$	$\frac{b}{0,297}$	$\frac{b}{0,5}$
2	2/3	0,175	0,858	0,0229	0,0728	0,0320	0,26	0,5
1	1/2	0,114	0,785	0,013	0,0688	0,0566	0,220	0,5
2/3	2/5	0,078	0,742	0,0076	0,0656	0,0594	0,195	0,5
1/2	1/3	0,054	0,713	0,00435	0,0635	0,0613	0,162	0,5
1/4	1/5	0,005	0,655	0,00006	0,06	0,0650	0,025	0,5
1/3	1/9	− 0,027	0,617	0,0033	0,0578	0,0675	−0,243	0,5
II. Les deux travées extérieures chargées.								
∞	1	$\frac{bq}{0,297}$	$\frac{bq}{1,003}$	$\frac{qb^2}{0,0440}$	$\frac{qb^2}{0,0824}$	$\frac{qb^2}{0,0430}$	$\frac{b}{0,297}$	$\frac{b}{0,5}$
2	2/3	0,32	0,814	0,0215	0,0680	0,0191	0,32	0,5
1	1/2	0,331	0,719	0,0547	0,0550	0,0073	0,331	0,5
2/3	2/5	0,338	0,662	0,0571	0,0946	0,0000	0,338	0,5
1/2	1/3	0,342	0,324	0,0584	0,0464	−0,0045	0,342	0,5
1/4	1/5	0,351	0,549	0,0612	0,0400	−0,0139	0,351	0,5
1/3	1/9	0,357	0,498	0,0637	0,0340	−0,0200	0,357	0,5

Table XXII. $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	max $\mathfrak{M}$ pour AB	$\mathfrak{M}$ pour B	max $\mathfrak{M}$ pour BC	Abscisse $\mathfrak{B}=0$ pour AB	Abscisse $\mathfrak{B}=0$ pour BC
III. La travée du milieu et une travée extérieure chargées.								
∞	1	$0{,}297\,bq$	$1{,}003\,bq$	$0{,}0440\,qb^2$	$0{,}0824\,qb^2$	$0{,}0430\,qb^2$	$0{,}297\,b$	$0{,}5\,b$
2	$^2/_3$	0,2928	1,0238	0,0429	0,0858	0,0482	0,293	0,517
1	$^1/_2$	0,2906	1,0342	0,0423	0,0875	0,0507	0,291	0,525
$^2/_3$	$^2/_5$	0,2893	1,0405	0,0418	0,0886	0,0520	0,289	0,53
$^1/_2$	$^1/_3$	0,2883	1,0446	0,0415	0,0893	0,0529	0,288	0,533
$^1/_4$	$^1/_5$	0,2866	1,0530	0,0412	0,0907	0,0554	0,287	0,54
$^1/_6$	$^1/_9$	0,2854	1,0586	0,0411	0,0917	0,0562	0,285	0,544

Table XXIII.

Valeurs maxima pour 3 travées. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$

Rapport $\frac{a}{b}$ =	$^1/_2$	$^3/_4$	$^4/_5$	$^5/_6$	$^7/_8$	$^9/_{10}$	1
Mmax $\mathfrak{M}$ sur BC . . .	$0{,}0595\,qb^2$	$0{,}0613\,qb^2$	$0{,}0612\,qb^2$	$0{,}0610\,qb^2$	$0{,}0606\,qb^2$	$0{,}0593\,qb^2$	$0{,}0584\,qb^2$
Mmax $\mathfrak{M}$ sur B	0,0729	0,0852	0,0893	0,0922	0,0963	0,0991	0,1111
Mmax $\mathfrak{M}$ sur A	0,0146	0,0509	0,0641	0,0584	0,0711	0,0745	0,0937

Afin de pouvoir comparer ces valeurs entre elles d'une manière exacte, il faut, dans beaucoup de cas, les réduire à une longueur totale L de toutes les travées. Nous avons $L = 2a + b$ d'où

$$b = \frac{L}{2\frac{a}{b} + 1}$$

Si l'on prend comme base une même longueur de toutes les travées de façon à ce que $l = \frac{L}{3}$, on a

$$b = \frac{3l}{2\frac{a}{b} + 1}$$

et afin d'exprimer notre valeur, fonction de b, en fonction de l, nous multiplierons toutes les valeurs de la table par $\left(\frac{3}{2\frac{a}{b} + 1}\right)^2$.

On obtient ainsi le résumé suivant.

Table XXIV. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$

$\frac{a}{b}$	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
Mmax $\mathfrak{M}$ pour BB . . .	ql^2 0,1338	ql^2 0,0883	ql^2 0,0814	ql^2 0,0769	ql^2 0,0721	ql^2 0,0679	ql^2 0,0584
Mmax $\mathfrak{M}$ sur B	0,1640	0,1231	0,1188	0,1172	0,1146	0,1134	0,1111
Mmax $\mathfrak{M}$ pour AB . . .	0,0328	0,0733	0,0777	0,0808	0,0845	0,0858	0,0937

Nous voyons par cette dernière table que le rapport $\frac{a}{b} = 1$ donne les moments les plus favorables; mais qu'au contraire les rapports 4/5 et 5/6 fournissent des moments qui ne diffèrent entre eux que de très-peu. En général il n'y aura pas grande différence quant à la quantité de métal employé; le choix des portées des travées dépendra d'autres considérations; nous avons déjà indiqué au N°. **79** pourquoi nous préférons le rapport $\frac{a}{b} = \frac{1}{1{,}225}$ pour le cas où d'autres considérations ne décident pas du choix de la portée.

La table XXV, à laquelle nous reviendrons pour juger de l'influence de la continuité, donne les moments de flexion maxima pour divers rapports d'ouverture de pont de portée quelconque.

81. Passons au cas où *les appuis ne sont pas à la même hauteur*. Nous supposons la poutre soutenue symétriquement, donc $a = c$; de plus, un même *abaissement* des deux piles intermédiaires. Comme nous l'avons fait pour deux travées, nous emploierons la méthode de Mr. Clapeyron. Pour chaque travée, on écrira l'équation 44) et les grandeurs auxiliaires X du N°. **22**, lesquelles on éliminera jusqu'à ce qu'il ne reste plus que les moments $\mathfrak{M}$ et l'abaissement s des piles du milieu; ce dernier est contenu dans la valeur auxiliaire $\varkappa_1$, pour laquelle l'équation X. donne

$$s = c_1 - c = \varkappa_1 \frac{\alpha^4}{24 E \Theta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 128)$$

Table XXV.

Valeurs de Max $\mathfrak{M}_B$ pour 3 travées.

$\frac{a}{b} =$	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
$\frac{p}{q} = 1$	qb^2 0,0703	qb^2 0,0789	qb^2 0,0824	qb^2 0,0845	qb^2 0,0879	qb^2 0,0900	qb^2 0,1000
3/4	0,0713	0,0813	0,0848	0,0874	0,0911	0,0934	0,1042
2/3	0,0716	0,0821	0,0858	0,0882	0,0921	0,0946	0,1055
1/2	0,0723	0,0836	0,0875	0,0903	0,0943	0,0968	0,1083
2/5	0,0725	0,0846	0,0886	0,0915	0,0956	0,0981	0,1100
1/3	0,0729	0,0855	0,0893	0,0922	0,0964	0,0991	0,1111
1/4	0,0732	0,0860	0,0902	0,0932	0,0974	0,1002	0,1125
1/5	0,0734	0,0865	0,0907	0,0938	0,0981	0,1009	0,1133
1/7	0,0737	0,0870	0,0914	0,0945	0,0988	0,1017	0,1143
1/9	0,0738	0,0873	0,0917	0,0948	0,0993	0,1021	0,1148

En éliminant les autres grandeurs auxiliaires, on obtient:

Moment sur la pile B

$$\mathfrak{M}_B = \frac{q_1(2a^3b + 2a^4) + q_2(b^4 + 2ab^3) - q_3a^3b - \varkappa_1(a^3b + 2a^4)}{32ab + 12b^2 + 16a^2} \quad 129)$$

et pour le moment sur la pile C

$$\mathfrak{M}_C = \frac{q_3(2a^3b + 2a^4) + q_2(b^4 + 2ab^3) - q_1a^3b - \varkappa_1(a^3b + 2a^4)}{32ab + 12b^2 + 16a^2} \quad 130)$$

Au moyen des équations 129) et 130), on trouvera les moments, et par les équations I. et II. du N°. **21**, les pressions sur les appuis en A et B

$$A = \frac{q_1(14a^3b + 6a^2b^2 + 6a^4) - q_2(b^4 + 2ab^3) + q_3a^3b + \varkappa_1(a^3b + 2a^4)}{32a^2b + 12ab^2 + 16a^3} \quad 131)$$

L'effort tranchant sur la pile B, du côté gauche

$$B_a = \frac{q_1(18a^3b^2 + 6a^2b^3 + 10a^4b) + q_2(b^5 + 2ab^4 - q_3a^3b^2 - \varkappa_1(a^3b^2 + 2a^4b)}{32a^2b^2 + 12ab^2 + 16a^3b}$$

et l'effort tranchant sur la pile B, du côté droit

$$B_b = \frac{q_1(3a^4b + 2a^5) - q_3(3a^4b + 2a^5) + q_2(16a^2b^3 + 6ab^4 + 8a^3b^2)}{32a^2b^2 + 12ab^3 + 16a^3b}$$

donc la pression sur le pile $B = B_a + B_b$

$$B = \frac{q_1(2a^5 + 13a^4b + 18a^3b^2 + 6a^2b^3) + q_2(8a^3b^2 + 16a^2b^3 + 8ab^4 + b^5) - q_3(2a^5 + 3a^4b + a^3b^2) - \varkappa_1(a^3b^2 + 2a^4b)}{32a^2b^2 + 12ab^3 + 16a^3b} \quad 132)$$

si l'on transpose dans les valeurs de A et B le poids q_1 par q_3 et réciproquement, on obtiendra les pressions sur les appuis C et D.—

Remarque. Pour plus de clarté, nous donnons ici les équations qui conduisent aux résultats indiqués ci-dessus:

D'après l'équation 44), pour la 1ère travée, puisque $\mathfrak{M} = 0$

$$\nu_1 = q_1 - \chi_1 + \varkappa_1 \quad \text{I.}$$
$$\psi_1 = q_1 - 2\chi_1 + 3\varkappa_1 \quad \text{II.}$$

pour la seconde travée, puisque $c_{,,} = c$, donc $\varkappa_2 = 0$

$$\nu_2 = q_2 - 2\mu_2 - \chi_2 \quad \text{III.}$$
$$\psi_2 = q_2 - 3\mu_2 - 2\chi_2 \quad \text{IV.}$$

pour la troisième travée, puisque $\mathfrak{M}_{,,,} =$

$$0 = q_3 - 2\mu_3 - \chi_3 + \varkappa_3 \quad \text{V.}$$

et d'après l'équation X. du N°. **22**, les grandeurs auxiliaires:

$$\alpha_1 = \frac{a^3}{24E\Theta}\,\psi_1 = \frac{b^3}{24E\Theta}\,\chi^2 \quad \ldots\ldots \text{VI.}$$

$$\mathfrak{M}_1 = {}^2/_3 a^2 \nu_1 = {}^2/_3 b^2 \mu_2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{VII.}$$

$$s = \varkappa_1 \frac{a^4}{24E\Theta} = -\varkappa_3 \frac{a^4}{24E\Theta} \quad \ldots\ldots \text{VIII.}$$

$$\alpha_{11} = \frac{b^3}{24E\Theta}\,\psi_2 = \frac{a^3}{24E\Theta}\,\chi^3 \quad \ldots\ldots \text{IX.}$$

$$\mathfrak{M}'' = {}^2/_3 b^2 \nu_2 = {}^2/_3 a^2 \mu_3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{X.}$$

Au moyen de ces 10 équations, on déterminera les 10 inconnues v_1 χ_1 ψ_1 ν_2 μ_2 ψ_2 χ_2 μ_3 χ_3 et $\varkappa_1$; on a laissé de côté les équations qui ne sont pas nécessaires pour trouver les moments $\mathfrak{M}$.

Après, avoir trouvé les pressions sur les appuis, on obtiendra d'après l'équation 116) la position de la ligne des fibres invariables, donc la flèche au milieu de la travée, ainsi que nous l'avons fait au N°. **77**, en employant encore ici la Fig. 79.

Au moyen des pressions sur les appuis, on calculera tous les $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{M}$, en se servant de nouveau des équations 108)—109a) et 112)—114); on pourra aussi faire une représentation graphique analogue à celle de la planche V, ce que l'on doit toujours faire pour un cas donné; cette représentation graphique sert en même temps de *contrôle* dans des calculs un peu difficiles et représente le tout beaucoup plus clairement que ne le font de simples formules ou les valeurs de chacun des moments.

On s'assurera par l'équation 130) que, comme dans le cas où les appuis sont à égale hauteur, le moment $\mathfrak{M}_B$ devient un maximum, lorsque q_1 et q_2 obtiennent leurs plus grandes et q et q_3 leurs plus petites valeurs, et l'on aura dans ce cas

$$\text{Max}\,\mathfrak{M}_B = \frac{q\,(2a^3b + 2a^4 + b^4 + 2ab^3) - pa^3b - \varkappa_1\,(a^3b + 2a^4)}{32ab + 12b^2 + 16a^2} \quad 133)$$

par l'abaissement du soutien B, le moment diminue et devient égal au résultat de l'équation 124) lorsqu'on place $\varkappa_1 = 0$.

Comme pour le cas où tous les appuis sont à hauteur égale, on peut démontrer que le moment dans AB devient maximum lorsque les deux travées extérieures sont chargées, le moment dans BC, lorsque la travée du milieu est seule chargée.

On obtient pour ces deux cas:

Moment de flexion max dans AB

$$\text{Mmax}\,\mathfrak{M}_a = \frac{A^2}{2q_1} = \frac{1}{2q}\left[\frac{qa^2\,(3a + 6b) - pb^3 + \varkappa_1 a^3}{8a^2 + 12ab}\right]^2 \quad 134)$$

Moment max. dans BC

$$\text{Mmax}\,\mathfrak{M}_b = \frac{qb^2\,(2a + b) - 2pa^3 + 2\varkappa_1 a^3}{16a + 24b} \quad \ldots\ldots 135)$$

Ces deux moments maxima augmentent avec l'abaissement des appuis, et deviennent égaux à ceux donnés par les équations 125) et 126) lorsqu'on place $x_1 = 0$. Le plus grand avantage d'abaissement des appuis sera obtenu lorsqu'on choisira le rapport des portées a : b et l'abaissement de façon que les 3 valeurs maxima données par les équations 133)—135) soient égales. Monsieur l'ingénieur Mohr donne la formule empirique suivante

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 136)$$

en faisant usage de ce rapport et en le combinant avec les équations 133), on peut trouver la valeur x_1 qui donne l'abaissement le plus favorable des appuis intermédiaires. Cet abaissement se trouve d'après l'équation 128).

Lorsqu'il existe un autre rapport entre les ouvertures, il faudra se borner à l'abaissement des appuis intermédiaires, pour lequel les deux plus grands des trois moments maxima seront égaux;

$$\text{si } \frac{a}{b} > \left(\frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\frac{p}{q}\right)$$

on a Mmax $\mathfrak{M}_a >$ Mmax $\mathfrak{M}_b$ et en combinant les équations 133) et 134) on obtiendra pour x_1 les équations de condition:

Max $\mathfrak{M}_B$ = Mmax M_a ou

$$(2a+b)\left[qa^2(3a+6b) - pb^3 + x_1 a^3\right]^2 = 8a^2q\,(2a+3b) \quad 137)$$
$$\left[q\,(2a^3b + 2a^4 + b^4 + 2ab^3) - pa^3b - x_1\,(a^3b + 2a^4)\right]$$

Si $\frac{a}{b} < \left(\frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\frac{p}{q}\right)$ on a Mmax $\mathfrak{M}_b >$ Mmax $\mathfrak{M}_a$ et en combinant les équations 133) et 135), on obtiendra la condition:

Mmax $\mathfrak{M}_B$ = Mmax $\mathfrak{M}_b$ ou bien

$$x_1 = \frac{4qa^4 + 4pa^4 + 4qa^3b - 4qa^2b^2 + qb^4}{4\,(2a^4 + ba^3)} \quad \ldots \quad 138)$$

82. Nous donnons dans la table XXVI, la valeur auxiliaire x_1 qui indique le moment de flexion max $\mathfrak{M}_b$ calculé au moyen des équations 133)—138) pour différents rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{p}{b}$.

Une comparaison des tables XXV et XXVI montre que l'abaissement le plus favorable des appuis diminue de 10—25% le moment sur les piles intermédiaires. On trouvera de même dans la table XXVI la valeur de x_1 pour laquelle les moments maxima sont égaux deux à deux. L'abaissement correspondant se trouve d'après l'équation 128).

$$x_1 = s\,\frac{24E\Theta}{a^4}$$

d'où

$$s = x_1\,\frac{a^4}{24E\Theta} = x_1\,\frac{b^4}{24E\Theta}\left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad \ldots \quad 139)$$

Table XXVI.

Moment de flexion max $\mathfrak{M}_B$ pour l'abaissement le plus favorable des appuis d'un pont à 3 travées.

	$\frac{a}{b}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
$\frac{p}{q} = 1$	Max $\mathfrak{M}_B$ =	$0.0625\ qb$	$0,0625\ qb$	$0,0625\ qb$	$0,0625\ qb^2$	$0,0625\ qb^2$	$0,0665\ qb^2$	$0,0858\ qb^2$
	x_1 =	1,009 q	0,704 q	0,707 q	0,712 q	0,7z q	0,62 q	0,284 q
3/4	Max $\mathfrak{M}_B$ =	0,0639	0,0665	0,0673	0,0676	0,0681	0,0718	0,0907
	x_1 =	0,95	0,68	0,65	0,64	0,65	0,57	0,27
2/3	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0644	0,0681	0,0691	0,0696	0,0706	0,0737	0,0925
	x_1 =	0,92	0,60	0,60	0,61	0,61	0,55	0,26
1/2	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0654	0,0708	0,0722	0,0730	0,0745	0,0771	0,0958
	x_1 =	0,875	0,55	0,55	0,56	0,56	0,52	0,25
2/5	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0660	0,0724	0,0741	0,0751	0,0768	0,0792	0,0980
	x_1 =	0,85	0,52	0,52	0,53	0,53	0,50	0,24
1/3	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0665	0,0735	0,0754	0,0765	0,0785	0,0805	0,0997
	x_1 =	0,82	0,50	0,50	0,51	0,51	0,49	0,23
1/4	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0670	0,0748	0,0771	0,0781	0,0805	0,0824	0,1010
	x_1 =	0,80	0,47	0,47	0,48	0,48	0,47	0,23
1/5	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0672	0,0757	0,0777	0,0793	0,0815	0,0834	0,1018
	x_1 =	0,80	0,46	0,46	0,47	0,47	0,46	0,23
1/7	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0675	0,0767	0,0791	0,0809	0,0829	0,0846	0,1033
	x_1 =	0,78	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45	0,22
1/9	$\mathfrak{M}_B$ =	0,0675	0,0772	0,0797	0,0815	0,0837	0,0854	3,1148
	x_1 =	0,78	0,43	0,43	0,43	0,44	0,44	0,22

Nous prendrons pour exemple, comme dans le N°. **75**, une poutre de hauteur H, dont le moment d'inertie est choisi de façon que le moment de flexion produise dans les fibres les plus

éloignées, une tension de $\mathfrak{A} = 600$ kilogr. D'après l'équation 31) nous avons:

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}} \frac{H}{2}$$

et plaçant $H = {}^1/_{10} \frac{2a + b}{3}$, c'est-à-dire égal à ${}^1/_{10}$ de la portée moyenne des 3 travées, nous obtiendrons par quelques réductions

$$s = \varkappa_1 \, b^3 \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4}{12000 \, \mathfrak{M} \left(2\frac{a}{b} + 1\right)}$$

La table XXVII est calculée d'après cette formule et contient les portées qui résultent de l'équation 103) du N°. **69** et de la table XVII. Il est vrai que les poids des ponts, pour des portées égales des travées intermédiaires, sera différent pour divers rapports $\frac{a}{b}$, donc les rapports $\frac{p}{q}$ ne s'appliqueront pas toujours à une même portée b, mais, pour les calculs préalables, on pourra déterminer par interpolation et d'une manière assez exacte pour les cas pratiques, l'abaissement le plus favorable.

Les tables XXV et XXVII montrent en même temps d'une manière claire, l'influence exercée sur la valeur des moments de flexion $\mathfrak{M}$ par un abaissement voulu ou résultant d'une faute de hauteur des piles. On peut aussi (comme dans le N°. **76** pour 2 travées), déterminer certaines limites entre lesquelles la continuité des poutres peut être adoptée.

En calculant les moments $\mathfrak{M}$ pour les limites entre lesquelles s peut se mouvoir dans une construction, on obtient des rapports pour les écartements des tensions longitudinales maxima, et l'on peut déterminer approximativement ces limites d'après les tables XXV—XXVII.

En employant la formule empirique 136), on trouve aussi dans les tables XXVI et XXVII les moments, donc les abaissements pour lesquels les maxima des 3 moments de flexion sont à-peu-près ou rigoureusement égaux, et l'on devra en général préférer ces rapports $\frac{a}{b}$, si l'on veut abaisser les supports.

83. Les *avantages* des poutres continues sont:

1) Epargne de la matière dans les nervures.

2) Montage facile, surtout pour franchir de larges fleuves ou de profondes vallées.

Les *désavantages* sont:

Table XXVII.

Abaissement le plus favorable pour 3 travées.

Portée de la travée du milieu b.	$\frac{a}{b}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
—	$\frac{p}{q} = 1$ s = —	b 0,00042 —	b 0,00119 —	b 0,00148 —	b 0,00171 —	b 0,00205 —	b 0,00182 —	b 0,00092 —
—	3/4	0,00039 —	0,00100 —	0,00123 —	0,00142 —	0,00169 —	0,00155 —	0,00083 —
175 M.	2/3	0,00037 6,68 C.	0,00093 16,27	0,00114 19,93	0,00132 23,09	0,00153 26,77	0,00146 25,52	0,00078 13,65
100	1/2	0,00035 0,50 C.	0,00082 8,20	0,00100 10,00	0,00115 11,5	0,00133 13,3	0,00132 13,20	0,00072 7,25
70	2/5	0,00033 2,31 C.	0,00076 5,32	0,00092 6,44	0,00106 7,42	0,00123 8,61	0,00123 8,61	0,00068 4,76
45	1/3	0,00032 1,44 C.	0,00072 3,24	0,00087 3,91	0,00100 4,50	0,00115 5,17	0,00119 5,45	0,00064 2,88
25	1/4	0,00031 0,78 C.	0,00066 1,65	0,00080 2,00	0,00092 2,30	0,00106 2,65	0,00111 2,78	0,00063 1,58
18	1/5	0,00031 0,56 C.	0,00064 1,15	0,00078 1,40	0,00089 1,60	0,00102 1,84	0,00108 1,94	0,00063 1,13
12	1/7	0,00030 0,36 C.	0,00061 0,73	0,00073 0,87	0,00082 0,98	0,00099 1,19	0,00104 1,25	0,00059 0,71
8	1/9	0,00030 0,24 C.	0,00059 0,47	0,00071 0,57	0,00079 0,63	0,00093 0,74	0,00101 0,81	0,00053 0,42

1) L'incertitude sur la détermination exacte des moments de flexion, qui varient considérablement avec la hauteur des soutiens.

2) Changement continuel de tension et de compression, tant dans les nervures que dans les parois verticales, et surtout pour des ponts légers, c'est-à-dire de faible ouverture.

Ce dernier désavantage est plus ou moins grand, suivant le choix de la construction; pour des constructions soignées et de dimensions assez fortes, il est peu à craindre; nous faisons surtout remarquer qu'à l'endroit où la tension et la compression changent, ces deux efforts ou du moins l'un d'eux, sont notablement plus faibles que ceux que permettrait la dimension de la section; souvent on ne tient pas compte de cette dernière remarque lorsqu'on critique les ponts à poutres continues; l'incertitude dans les hauteurs des appuis est aussi moins à craindre pour de grands ponts et peut disparaître complétement ou du moins être renfermée entre d'étroites limites.

L'avantage dans le montage n'existe que lorsque les poutres principales avec leurs entretoises peuvent être montées d'une seule pièce aux abords du pont, pour être ensuite glissées sur les appuis. Ce mode de montage est partout employé dans le Sud de l'Allemagne (d'abord par M. M. Benkiser à Pforzheim); d'après les recherches faites sur l'abaissement des appuis, il faudra faire attention à ce qu'il ne s'opère aucun changement de forme des nervures par suite de la pose du pont, et du reste, qu'aucune pièce ne soit soumise à des efforts démesurés.

Nous voulons encore rechercher plus spécialement si, pour un cas donné, on peut épargner du métal en construisant une poutre continue. Si l'on fait varier les nervures proportionnellement aux moments de flexion, on voit d'après la représentation graphique des planches IV et V, qu'on peut obtenir un amoindrissement des moments $\mathfrak{M}$ par la continuité, qui est à-peu-près le même pour 2 que pour 3 travées, et l'on peut ainsi épargner 15—20% en poids des nervures.

Une comparaison des tables XXV et XXVI montre de plus que, pour le cas ou l'on a 3 travées d'ouvertures données, le moment maximum, comparé à la valeur $0{,}125qb^2$ qui correspond au moment maximum d'une poutre reposant librement sur deux appuis, peut être diminué de 25—45% lorsqu'on abaisse les appuis intermédiaires et de 10—30% lorsque cela n'a pas lieu. — Pour 2 travées, ce moment maximum ne peut pas être diminué si l'on n'abaisse pas la pile du milieu; on a une diminution de 24 à 28% d'après la table XXIV, si l'abaissement a eu lieu.

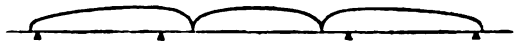
En général cette dernière remarque a peu de valeur pratique, car, pour de grands ponts, on fait diminuer les dimensions des poutres avec les moments; plusieurs raisons engagent à rejeter la continuité pour de petits ponts.

84. Monsieur l'ingénieur Gerber a cherché à tourner les désavantages, (souvent exagérés) des poutres continues, en construisant

des *poutres à appuis libres* (voir fig. 81); dans la description contenue dans son brevet, qu'il a bien voulu nous communiquer, il est dit:

„Si l'on suppose une poutre dépassant les appuis d'une certaine longueur, l'extrémité de chacun de ces allongements peut aussi servir de support pour une nouvelle poutre (libre), dont l'autre extrémité reposera sur un appui, ou bien, comme la première, sur le prolongement d'une troisième travée.

Fig. 81.



„Le calcul et la construction de la poutre libre soutenue aux deux extrémités sont les mêmes que pour une poutre ordinaire, puisqu'elle ne doit être reliée avec la poutre qui la soutient (ou l'appui) qu'en *un seul* point; la poutre qui dépasse ses appuis supporte à ses extrémités les réactions des appuis de la poutre libre suivante, lesquels sont immédiatement donnés, plus son propre poids, et la réaction opérée contre ces forces n'est produite que par les deux réactions des appuis, qui peuvent être calculées d'une manière sûre et simple d'après les conditions ordinaires d'équilibre. — Les tensions moléculaires dans une pareille poutre, se calculeront aussi facilement et aussi simplement que pour une poutre ordinaire.

„Comme les réactions sur les piles, d'après ce que nous venons de voir, ne dépendent nullement de la flexion, mais seulement des grandeurs et des répartitions des charges, l'abaissement d'une pile ne peut avoir aucune influence sur les tensions moléculaires de la poutre.

„De ce système d'appuis libres, il résulte qu'une travée à poutres libres doit être suivie d'une travée à poutre continue."

§ 9.

Influence de la largeur des appuis et du nombre des fermes.

85. Jusqu'ici, nous avons toujours supposé la réaction des appuis (ou pressions sur les appuis), concentrée en *un point*. — Il est en effet utile de réduire la largeur des appuis autant que le permettra la résistance des matériaux employés; la poutre est en général renforcée par des nervures verticales qui déterminent ainsi la surface de contact — on a réduit considérablement cette surface pour de grands ponts, en construisant les surfaces de contact en acier fondu; mais aussi pour la fonte, comme pour le fer forgé, il suffira d'une petite surface de contact entre la poutre et les glissières; dans ce cas il ne peut pas exister de doute sur

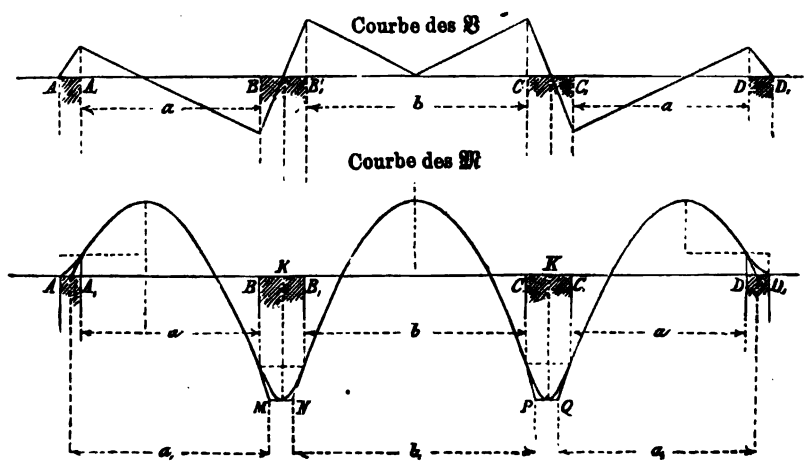
la direction de la résultante des pressions; la largeur de l'appui peut être négligée et l'on peut prendre comme portée, la distance moyenne des appuis.

Il est clair que la pression sur les appuis ne doit pas trop se rapprocher de l'arête de la pile, la portée à introduire dans le calcul sera donc toujours notablement plus grande que celle de l'ouverture entre les piles. — Bien que la glissière ne demande qu'une faible surface de contact avec la poutre, il faudra néanmoins l'élargir du côté de la pile; cette glissière doit être suffisamment renforcée par des cannelures convenables, afin que la pression concentrée sur un point se répartisse sur une plus grande surface; les glissières reçoivent alors la forme de sabots.

86. Dans l'emploi d'appuis qui ont une grande surface de contact avec les poutres, le constructeur devra s'appliquer à ce que la pression se répartisse d'une manière uniforme sur cette grande surface d'appui, ce qui aura lieu à l'aide de nervures ou armatures verticales. Nous considérons le problème comme résolu le mieux possible et nous supposons, d'abord pour le rapport $\frac{b}{a} = 1{,}225$, que la pression soit uniformément répartie sur l'appui; le changement de forme des courbes des moments de flexion $\mathfrak{M}$ se fera peu-à-peu et dans ce cas aussi, la courbe des $\mathfrak{M}$ se composera sur les piles, d'arcs de parabole.

Nous obtiendrons comme forme générale des $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ celle indiquée par la fig. 82 pour le cas d'une charge maximum uniforme et du rapport $\frac{b}{a} = 1{,}225$.

Fig. 82.

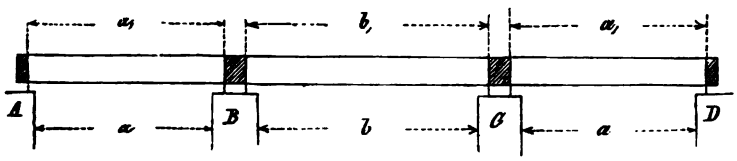


Si, dans la fig. 82, on prolonge la parabole correspondant à AB jusqu'à sa rencontre avec les horizontales AA et MN, d'après les propriétés de la parabole, la distance AA ou BK sera (à peu près) divisée en deux parties égales et l'on aura la distance

$$a_1 = a + \frac{AA'}{2} + \frac{BB'}{4}$$

Afin de pouvoir construire cette parabole, il est nécessaire de connaître le point $\mathfrak{B} = 0$, ou bien la valeur de la pression sur la culée en A. Substituons à notre figure celle que représente l'arrangement de la fig. 83; si l'on fait abstraction des surfaces hâchées, on obtient une poutre continue dont les appuis sont con-

Fig. 83.



centrés en divers points et distants de a_1 b_1 et a_1. Afin de trouver la valeur de a_1, il faut ajouter à la portée dans œuvre a, la moitié de la longueur d'appui sur la culée extérieure et un quart de la longueur des appuis du milieu.

Si le rapport des travées $\frac{a}{b}$ varie, l'effort tranchant des deux côtés des piles intermédiaires n'est plus le même, et si le point $\mathfrak{B} = 0$ doit passer sur le milieu des piles, la réaction des appuis ne peut plus être répartie également sur la largeur de la surface d'appui; la courbe des $\mathfrak{M}$ sur les piles n'est plus une parabole, mais une courbe d'un degré supérieur; la supposition que $\mathfrak{B} = 0$ passe par le milieu des piles, et celle que la pression sur les appuis varie d'une manière continue, permettront d'employer le mode indiqué par les fig. 82 et 83, ce qui est aussi motivé pour le cas d'une charge partielle, car, plus l'effort tranchant augmente du côté d'une travée chargée, plus aussi la réaction de l'appui sur cette moitié du soutien augmentera, de façon que le point $\mathfrak{B} = 0$ restera, aussi pour ce cas, dans le voisinage du milieu de l'appui.

Tout ce raisonnement est fondé sur l'hypothèse faite en commençant, que la pression sur l'appui doive se répartir sur une portion notable de la poutre au moyen d'un arrangement convenable, et il est clair qu'ordinairement la longueur de la glissière est plus petite que l'épaisseur de la pile.

Pour le cas d'une épaisseur de piles assez considérable, Monsieur l'ingénieur Mohr a fait la proposition de former deux points de supports distincts sur chaque pile intermédiaire, et de considérer comme travée spéciale la distance comprise entre les deux points supports du même appui; on peut employer la méthode Clapeyron, développée dans les N^os^. **21** et **22**.

L'inconvénient qui peut facilement résulter pour des ouvertures moins grandes, c'est que ces poutres, lors d'un chargement partiel, se soulèvent sur l'un des appuis.

87. Dans nos calculs, les valeurs des moments de flexion $\mathfrak{M}$, des efforts tranchants $\mathfrak{B}$, du propre poids de la construction p, du poids total q, ainsi qu'elles sont données dans les tables XVII, se rapportent toutes à *une simple voie* de chemin de fer.

Lorsqu'une voie est supportée par deux poutres, chacune d'elles est destinée à recevoir la moitié des poids et des moments calculés pour une voie.

Il peut aussi arriver que 3 ou plusieurs poutres aient à supporter ensemble une voie d'une manière inégale. Le poids du pont à introduire dans les formules sera à-peu-près le même, mais il faudra calculer la partie du poids de la construction et de la surcharge que chaque poutre devra supporter.

Il arrive souvent, *qu'une même poutre principale contribue à supporter deux voies.*

Lorsqu'il n'existe que deux poutres principales, il faudra calculer pour chacune d'elles, les poids p, q, $\mathfrak{B}$ et les moments de flexion $\mathfrak{M}$ pour une voie, parce qu'il faudra toujours considérer le cas de la charge simultanée des deux voies.

Lorsque trois fermes ont à supporter deux voies, celle du milieu est destinée à recevoir à peu près la moitié de la surcharge, un peu plus ou un peu moins, suivant le rapport des leviers, donné par la construction des entretoises. Il ne convient pas de construire l'entretoise comme poutre continue, car celle-ci ne résistera guère que comme une poutre simple lorsque la charge vient à passer sur un seul côté (puisque le contre-poids de l'autre surcharge n'existe pas), tandis que pour une surcharge des deux côtés, les fermes extérieures ont relativement moins, celle du milieu plus à supporter que la moitié de la charge. On pourrait employer un abaissement de l'appui pour la ferme du milieu, afin de contre-balancer ce désavantage, toutefois il faut remarquer qu'il en résultera un amoindrissement de rigidité et de solidité de la construction entière, et que la preuve de l'existence de l'abaissement serait souvent difficile à démontrer.

Si l'on admet que les entretoises reposent librement sur les deux fermes, on ne peut être en doute sur la répartition de la charge, car on considère les deux travées comme étant chargées, et le poids des poutres et principalement celui du tablier

se répartissent à-peu-près proportionnellement à celui de la surcharge.

88. Lorsque les deux voies d'un pont sont supportées par 2 ou 3 fermes, il arrivera dans la plupart des cas, que la charge d'une des voies produira une *flèche différente* sur chacune des fermes.

Cette flèche atteindra son maximum pour une poutre reposant librement sur deux appuis. — Cette flexion f est donnée par l'équation 42) pour le cas de la charge maximum q

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

où l indique la portée de la ferme, mais, d'après l'équation 31)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

de plus, pour la section moyenne, (où se trouve la flexion maximum)

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8}\,ql^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

et

$$a = \frac{H}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

c'est-à-dire doit être remplacé par la moitié de la hauteur de la poutre; il résulte des équations I.—III.

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M} \cdot H}{2 \cdot \mathfrak{A}} = \frac{q \cdot l^2}{16} \cdot \frac{H}{\mathfrak{A}} \quad \ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

qui, remplacé dans l'équation 42), donne:

$$f = \frac{5}{24} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{E} \cdot \frac{l^2}{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 140)$$

Pour une charge maximum, où le fer forgé est soumise à un effort de 600 kilogr. par centimètre carré, nous avons $\frac{E}{\mathfrak{A}} = 3000$; d'où il résulte que la flèche maximum pour une telle poutre en fer forgé, reposant librement sur deux appuis, sera:

$$f = 0{,}00007\,\frac{l}{H} \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad 141)$$

Lors d'une charge partielle, la ferme du milieu n'aura à subir qu'une partie de cette flexion; si la charge est q par unité de longueur, la flèche maximum sera

$$f_1 = \frac{q}{q}\,0{,}00007\,\frac{l}{H} \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad 142)$$

et en calculant f_1 pour chaque ferme, on obtiendra les différences cherchées de l'abaissement.

Exemple. Un pont de 40 mètres de portée est formé de deux fermes ayant à supporter deux voies; d'après la table XVII, le propre poids du pont sera $p = \frac{1}{3} q$ et la surcharge pour une voie $k = \frac{2}{3} q$; supposons que cette dernière se répartisse, pour le cas d'une charge partielle, d'après les rapports $\frac{2}{7}$ et $\frac{5}{7}$, de manière qu'une ferme ait à supporter la surcharge $\frac{2}{7} k = \frac{4}{21} q$ et l'autre $\frac{5}{7} k = \frac{10}{21} q$; la charge totale des deux fermes est donc

$$\text{pour la ferme I.} \quad p + \frac{4}{21} q = \frac{11}{21} q,$$

$$\text{pour la ferme II.} \quad p + \frac{10}{21} q = \frac{17}{21} q.$$

Donc d'après l'équation 142), remplaçant l par sa valeur 40 m. = 4000 Cent. et le rapport $\frac{l}{H}$ par $\frac{1}{10}$ on aura:

pour la ferme I.

$$f_1 = \frac{11}{21} 0{,}0007 \cdot 4000 \text{ cent.} = 1{,}6 \text{ cent.}$$

pour la ferme II.

$$f_1 = \frac{17}{21} 0{,}0007 \cdot 4000 \text{ cent.} = 2{,}475 \text{ cent.}$$

La différence des flexions dans le cas de la charge partielle est donc au milieu, de 0,875 cent., ce qui procure un petit voilement du pont ou une légère rotation de la section moyenne.

§ 10.

Moments de flexion pour de petites poutres.

89. Pour de petites poutres, on a affaire à des charges concentrées; le calcul des moments de flexion $\mathfrak{M}$ et des efforts tranchants $\mathfrak{V}$ se fait d'après les équations 100—102), lorsque la poutre repose librement sur deux appuis. On ne peut guère conseiller de construire dans ce cas des poutres continues.

D'un côté, l'avantage qu'on obtiendrait est très-faible et d'autre part, il est démontré par les développements des N°. **75** et **82** combien de faibles variations dans la hauteur des appuis peuvent faire

varier les moments de flexion, de sorte que l'avantage de la continuité disparaît et qu'au contraire, il n'en résulte qu'une incertitude au sujet des forces qui agissent en réalité.

Des poutres successives non continues peuvent être reliées à leurs extrémités, ce qui ne rend la construction que plus solide, et en outre, ces liaisons influent avantageusement sur la force de résistance de la poutre; si l'on doit obtenir la tension avec exactitude dans un cas particulier, on pourra tenir compte de cet assemblage aux extrémités, en introduisant le moment de résistance de cet assemblage dans le calcul; en général, il est déterminé par la position et la section des boulons d'assemblage.

Dans le calcul de poutres de pont, on ne tiendra généralement pas compte du moment de cet assemblage des extrémités, qui n'est que faible si l'on n'a pas eu l'intention d'obtenir une continuité plus ou moins complète.

90. Le propre poids de petites poutres peut être en général négligé lorsqu'on calcule les dimensions de ces dernières. Si l'on n'a que des poutres reposant librement sur deux appuis, le calcul sera fort simple et se réduira à un emploi réitéré de la théorie du levier. Dans le paragraphe qui suit, sur les poutres homogènes, nous avons calculé numériquement les moments de flexion pour les coupes qui arrivent le plus fréquemment en pratique.

Afin de simplifier aussi les calculs pour des cas particuliers, et de montrer plus en détail et clairement les propriétés des petites poutres, nous avons consigné dans la table XXVIII les moments de flexion et les flèches pour une série de dispositions; les extrémités encastrées sont indiquées par des hâchures, et l'on a obtenu dans ces cas les moments de flexion par l'emploi réitéré des développements des N^os^. **19—21**, en posant la condition, que la tangente de l'angle de la ligne élastique à l'extrémité encastrée soit nulle.

Table XXVIII.

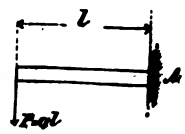
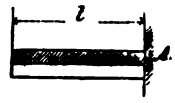
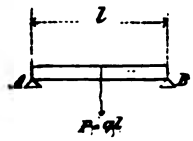
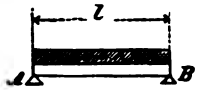
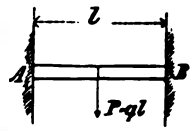
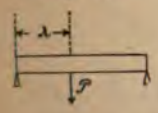
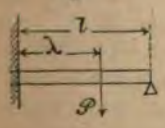
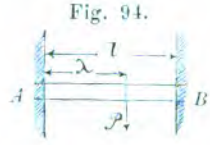
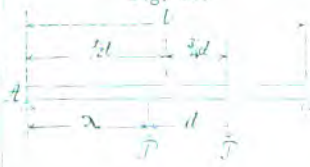
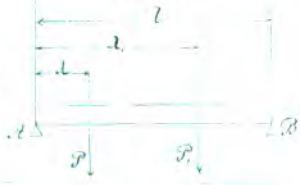
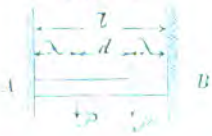
Nro.	Disposition adoptée pour la poutre.	Valeur maximum des moments de flexion.		Flèche maximum.	
		Abscisse comptée à partir de A.	$\mathfrak{M}$	Abscisse comptée à partir de A.	Flèche.
1	Fig. 84. 	0	$Pl = ql^2$	l	$^1/_3 \quad \frac{ql^4}{E\Theta}$
2	Fig. 85. 	0	$\frac{ql^2}{2}$	l	$^1/_8$ »
3	Fig. 86. 	$\frac{l}{2}$	$\frac{Pl}{4} = \frac{ql^2}{4}$	$\frac{l}{2}$	$^1/_{48}$ »
4	Fig. 87. 	$\frac{l}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{l}{2}$	$^5/_{384}$ »
5	Fig. 88. 	0 $\frac{l}{2}$ l	$\frac{Pl}{4} = \frac{ql^2}{8}$	$\frac{l}{2}$	$^1/_{192}$ »

Table XXVIII.

Nro.	Disposition adoptée pour la poutre.	Valeur maximum des moments de flexion.		Flèche maximum.	
		Abscisse comptée à partir de A.	$\mathfrak{M}$	Abscisse comptée à partir de A.	Flèche.
6	Fig. 89.	0 l $\frac{l}{2}$	 $\frac{ql^2}{12}$ $\frac{ql^2}{24}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{384}\,\frac{ql^4}{E\Theta}$
7	Fig. 90.	dans A $= 0$	$\frac{3}{16}\,Pl = \frac{3}{16}\,ql^2$	$0{,}553\,l$ $\frac{l}{2}$ *)	$0{,}00932\,\frac{Pl^3}{E\Theta}$ $0{,}00911\,\frac{Pl^3}{E\Theta}$
8	Fig. 91.	0	$\frac{1}{8}\,ql^2$	$0{,}572\,l$	$0{,}0054\,\frac{Pl^3}{E\Theta}$
9	Fig. 92. 	λ	$P\,\frac{\lambda}{l}\,(l-\lambda)$	λ *)	$\frac{P\lambda^2}{6E\Theta}(l-\lambda)\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$
10	Fig. 93. 	dans A $= 0$ λ	$P\,\frac{\lambda\,(2l-\lambda)\,(l-\lambda)}{2\,l^2}$ $P\,\frac{\lambda^2\,(3l-\lambda)\,(l-\lambda)}{2\,l^3}$	$l-\sqrt{\frac{l-\lambda}{3\,l-\lambda}}$ λ *)	$\frac{P}{E\Theta}\left[\frac{\lambda^3}{3}-\frac{\lambda^4}{12\,l^3}(3l-\lambda)^2\right]$ $\frac{P}{3\,E\Theta}\,\frac{(l-\lambda)^2}{l}\,\lambda^2$

*) *Remarque.* La flèche n'est pas maximum pour les abscisses qui portent l'astérisque *).

Table XXVIII.

Nro.	Disposition adoptée pour la poutre.	Valeur maximum des moments de flexion. Abscisse comptée à partir de A.	Valeur maximum des moments de flexion. $\mathfrak{M}$	Flèche maximum. Abscisse comptée à partir de A.	Flèche maximum. Flèche.
11	Fig. 94. 	dans A $= 0$	$P\frac{\lambda(l-\lambda)^2}{l^2}$	—	—
		λ	$P\frac{\lambda^2(l-\lambda)^2}{2l^3}$	—	—
		l	$P\frac{\lambda^2(l-\lambda)}{l^2}$	—	—
12	Fig. 95.	λ à $\lambda+d$	$P\frac{l-d}{2}=P\lambda$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda(3l^2-4\lambda^2)}{24}\frac{P}{E\Theta}$
13	Fig. 96. 	$l=\frac{l}{2}-\frac{d}{4}$	$P\frac{(2l-d)^2}{8l}$	—	—
14	Fig. 97. 	λ	$P\frac{\lambda}{l}(2l-\lambda-\lambda_1)$	—	—
		λ_1	$P\frac{l-\lambda_1}{l}(\lambda+\lambda_1)$	—	—
15	Fig. 98. 	dans A $= 0$	$P\lambda\frac{l-\lambda}{l}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda^2(3l-4\lambda)}{24}\frac{P}{E\Theta}$
		λ à $\lambda+d$	$P\frac{\lambda^2}{2}$		

Remarque. Le cas 13 est la position la plus défavorable des deux poids; d'après une transformation, on a: $\mathfrak{M}=P\frac{l-d}{2}+P\frac{d^2}{8.l}$ (voir le 12ème cas).

CHAPITRE QUATRIÈME.

Règles pratiques pour ponts-poutres à parois pleines.

§ 11.

Poutres homogènes.

91. On trouve le moment de résistance d'une poutre à paroi pleine d'après l'équation 31), en calculant le moment d'inertie de la poutre considérée.

Si nous nommons pour une section x quelconque:

$\mathfrak{M}$ le moment de flexion,
ΣXy le moment de résistance de même valeur numérique,
$\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) l'effort de tension (compression) des fibres extérieures,
$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) la distancee des fibres extérieures, soumises à des efforts de tension, (compression) à la ligne des fibres invariables,
Θ le moment d'inertie de la section de la poutre, on a:

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \Theta \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé les moments de flexion $\mathfrak{M}$ pour divers cas et en particulier pour de *petites poutres*, entretoises etc.; ces résultats sont contenus dans la table XXVIII. Les cas spéciaux doivent être calculés d'après les formules 101)—102) (page 89), qui se simplifieront beaucoup si l'on néglige le propre poids de la poutre.

Les efforts de tension et de compression à adopter sont indiqués dans le chapitre deuxième, le calcul des moments d'inertie est développé dans le chapitre premier, et le N°. **14** contient un résumé des moments d'inertie pour des formes souvent employées, tandis que le N°. **16** renferme une formule approximative qui, dans beaucoup de cas, fournira bien plus rapidement et avec une exactitude suffisante les résultats qu'on se propose d'obtenir.

92. Les *poutres en fer forgé* sont celles qu'on rencontre le plus généralement dans les constructions de ponts, et qui présentent aussi les formes les plus variées. L'effort à adopter pour de bons fers laminés peut être pris jusqu'à 700 kilogr., mais nous n'adopterons que 600 kilogr. comme effort maximum pour de petits ponts.

En conservant les notations des numéros précédents, nous aurons d'après l'équation 31)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{a}\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{b}\Theta \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{M}\frac{a}{\Theta} = \mathfrak{B}\frac{a}{b} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{M}\frac{b}{\Theta} = \mathfrak{A}\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 143)$$

Le tout étant exprimé en kilogrammes, $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ ne doit pas dépasser 600; il doit même être plus faible, lorsque l'effort de tension oblique de la paroi, lequel ne doit pas non plus dépasser 600 kilogr., deviendrait plus grand que l'effort de tension longitudinal maximum (voir N°. **26** et **27**).

La paroi du milieu n'entre que pour peu dans la valeur du moment d'inertie et devra en conséquence être de faible épaisseur pour des poutres homogènes en fer forgé; l'effort tranchant $\mathfrak{B}$ détermine toutefois un minimum d'épaisseur de la paroi.

Si nous nommons pour une section verticale x:

$\mathfrak{B}$ l'effort tranchant que doit supporter la section,
ΣY la valeur numérique égale à la résistance verticale,
S_0 la force rasante par unité de longueur qui agit dans la fibre neutre de la poutre,
$\mathfrak{S}_0$ l'effort rasant par unité carrée à cet endroit,
$\mathfrak{H}$ la distance des points d'application de la tension et de la compression,
δ l'épaisseur de la paroi du milieu, d'après l'équation 46) on a:

$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

et d'après l'équation 47)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{S_0}{z} = \frac{S_0}{\delta} \quad \ldots \quad \text{II.}$$

et il résulte de I. et II. comme effort rasant horizontal dans la fibre neutre:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{B}}{\delta\mathfrak{H}} \quad \ldots \quad 144)$$

Si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes, $\mathfrak{S}_0$ ne doit pas dépasser 350, d'où résulte la règle

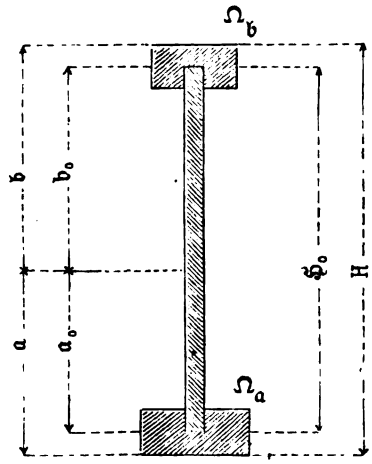
$$\delta \geqq \frac{\mathfrak{B}}{= 350\,\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 145)$$

La valeur exacte de $\mathfrak{H}$ est donnée d'après l'équation 32) du N°. **14**

$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^b z \,.\, y \,.\, dz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

L'intégrale représente le moment de la section soumise à la compression et se calcule ordinairement d'une manière facile (du reste numériquement égal au moment de la section soumise à la traction).

Fig. 99.



Dans beaucoup de cas, le calcul approximatif suivant conduira plus vite et assez exactement au but; la distance $\mathfrak{H}$ des deux résultantes des forces qui agissent dans les nervures, peut être regardée comme étant égale à la distance des centres de gravité des nervures; si l'on désigne (voir fig. 99) par a_0 et b_0 les distances de ces résultantes à la fibre invariable, par Ω_a (Ω_b) la section des nervures soumises à la tension (compression) et si l'on peut considérer la hauteur de la paroi du milieu comme étant égale à $\mathfrak{H}_0$, (ce qui est assez exact pour de grandes poutres) on a:

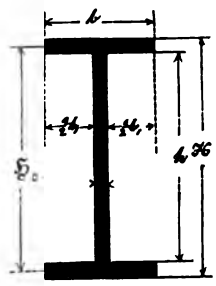
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \left\{ 1 - \frac{1}{12} \, \frac{\delta \,(a_0{}^2 + b_0{}^2)}{b_0 \,(\Omega_b + {}^1/_2 \,\delta b_0)} \right\} \quad 147)$$

Pour des sections symétriques, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 = {}^1/_2\,\mathfrak{H}_0$ et la formule ci-dessus devient

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \frac{12\,\Omega + 2\,\delta\mathfrak{H}_0}{12\,\Omega + 3\,\delta\mathfrak{H}_0} \quad \ldots\ldots \quad 148)$$

Pour des sections compliquées, par exemple pour des profils de rails, il sera préférable d'employer pour la détermination de $\mathfrak{H}$ le moyen graphique indiqué dans le N°. **17**.

Fig. 100.



93. En maintenant les règles précédentes, nous voulons calculer l'effort oblique de tension (compression) d'une poutre symétrique à forme de double ⊤, dont les dimensions sont indiquées dans la figure 100. L'effort de tension (pression) maximum se trouve dans la paroi verticale près des nervures, où la tension longitudinale est $\mathfrak{A}_y$. Nous prenons pour effort de tension longitudinale dans la fibre extérieure 550 kilogrammes, donc

$$\mathfrak{A}_y = 550\,\frac{h}{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad I.$$

le tout est exprimé en kilogrammes et en centimètres. La force rasante horizontale se trouve d'après l'équation 45)

$$S_y = \frac{\Sigma Y}{\Theta}\int_y^b zy\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad II.$$

et en substituant cette valeur dans l'équation 47), tout en plaçant pour z l'épaisseur δ de la tôle, on obtient pour l'effort rasant horizontal à cet endroit:

$$\mathfrak{S}_y = \frac{\Sigma Y \int_y^b zy\,dy}{\delta \qquad \Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad III.$$

si l'on remplace $\frac{\Sigma Y}{\delta} = \frac{\mathfrak{B}}{\delta}$ par sa valeur tirée de l'équation 144), et que l'on tienne compte de ce que $\int_y^b zy\,dy$ est le moment de la section supérieure par rapport à l'axe neutre, on obtient:

$$\mathfrak{S}_y = \frac{3}{2}\,\frac{b\,(H^2 - h^2)}{bH^2 - b_1h^2}\,.\,350\,\mathfrak{H} \quad \ldots \quad IV.$$

Si l'on écrit de plus $\frac{h}{H} = \frac{9}{10}$, $\frac{b_1}{b} = \frac{9}{10}$ il en résulte, d'après

l'équation 148) $\mathfrak{H} = 0{,}84\ H$ qui, indroduit dans l'équation IV., donne

$$\mathfrak{S}_y = 245 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

et d'après l'équation I.

$$\mathfrak{A}_y = \frac{h}{H}\ 550 \text{ kilogr.} = 495 \text{ kilogr.} \quad . \quad \text{VI.}$$

Si l'on remplace enfin les valeurs $\mathfrak{S}_y$ et $\mathfrak{A}_y$ des équations V. et VI. dans l'équation 55), on obtient comme effort de tension ou de compression oblique:

$$\mathfrak{D} \max = \frac{495}{2} \pm \sqrt{245^2 + \left(\frac{495}{2}\right)^2} = 602{,}5 \text{ kilogr.} \quad . \quad \text{VII.}$$

Si l'on avait pris $\mathfrak{A} = 600$ kilogr., on aurait eu à cet endroit (limite entre la nervure et la paroi du milieu) $\mathfrak{A}_y = 540$ et $\mathfrak{D}$ max serait devenu égal à 670 kilogr., valeur trop forte pour une telle poutre soumise directement aux chocs des wagons de chemins de fer; il arrivera du reste rarement que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{S}_0$ atteignent leur maximum dans une même section.

L'effort que la paroi du milieu doit supporter est encore plus grand lorsque la charge est au-dessus, et qu'il n'existe pas de nervures verticales rigides; dans ce cas, la paroi du milieu est soumise sur une certaine longueur, à une compression verticale qui n'est pas comprise dans le calcul de la pression oblique maximum, ainsi que nous l'avons fait remarquer à la fin du N°. **25**; cette compression serait donc un peu plus grande que celle calculée ci-dessus, d'après l'équation 55).

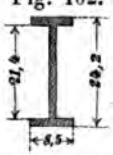
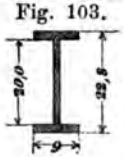
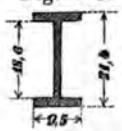
94. La forme de **I** (ou double ⊤) est celle qu'on rencontre le plus ordinairement pour des poutres homogènes en fer forgé; dans le N°. **14**, nous avons calculé les moments d'inertie Θ pour des formes symétriques et non-symétriques, d'où l'on tire les moments de résistance d'après l'équation 31)

Afin de faciliter le calcul, nous avons construit la table suivante XXIX; les moments de résistance, calculés et indiqués en kilogrammètres, correspondent à un effort de tension longitudinale maximum de 600 kilogrammes par centimètre carré; la réduction pour d'autres efforts est facile à faire d'après l'équation 31), puisque que les moments de résistance sont directement proportionnels aux efforts adoptés.

Les dimensions des figures 101)—108) sont indiquées en fonction de l'épaisseur de la paroi du milieu, l'épaisseur de la nervure est toujours prise 1,4 fois plus grande que celle de la paroi du milieu, ce qui correspond aux rapports ordinaires des fers en **I** tels que les fournissent actuellement les usines; pour la plupart des fers en **I**, on trouvera dans la table un profil à peu près

Table XXIX.

Les cotes des figures sont exprimées en fonction de l'épaisseur δ de la paroi du milieu.

poids par mètre courant.	8,80 k	12,7 k	17,25 k	22,5 k	28,5 k	35,2 k	42,6 k	50,7 k	59,5 k	69,0 k	79,2 k	90,1 k	101,7 k	114,0 k
δ =	0,5 c	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8 c
Fig. 101.	H = 12,8 c	15,4	17,9	20,5	23,0	25,6	28,2	30,7	33,1	35,8	38,4	41,0	43,5	46,1
	ΣXy = 249	431	684	1021	1454	1994	2654	3446	4381	5471	6730	8167	9797	11629
Fig. 102. 	H = 12,1 c	14,5	16,9	19,4	21,8	24,2	26,6	29,0	31,5	33,9	36,3	38,7	41,1	43,6
	ΣXy = 242	417	663	990	1409	1933	2573	3340	4250	5304	6524	7918	9497	11273
Fig. 103. 	H = 11,4 c	13,7	16,0	18,2	20,5	22,8	25,1	27,4	29,6	31,9	34,2	36,5	38,8	41,0
	ΣXy = 233	403	639	954	1359	1864	2481	3221	4095	5115	6291	7635	9158	10871
Fig. 104. 	H = 10,7 c	12,8	15,0	17,1	19,3	21,4	23,5	25,7	27,8	30,0	32,1	34,2	36,4	39,5
	ΣXy = 223	386	613	915	1303	1787	2378	3088	3926	4903	6031	7320	8779	10422

Remarque. L'effort dans les fibres extérieures est calculée à 600 kilogr. par cent. carré.
La hauteur H est exprimée en centimètres, ΣXy en kilogrammètres.

Continuation de la Table XXIX.

Les cotes des figures sont exprimées en fonction de l'épaisseur δ de la paroi du milieu.

poids par mètre courant.	8,80 k	12,7 k	17,25 k	22,5 k	28,5 k	35,2 k	42,6 k	50,7 k	59,5 k	69,0 k	79,2 k	90,1 k	101,7 k	114,0 k
δ =	0,5 c	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8 c
Fig. 105.														
	H = 10,0 c	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0
	ΣXy = 213	368	584	871	1241	1702	2265	2941	3739	4670	5744	6971	8362	9926
Fig. 106.														
	H = 9,3 c	11,2	13,0	14,9	16,7	18,6	20,6	22,3	24,2	26,0	27,9	29,8	31,6	33,5
	ΣXy = 201	347	552	823	1173	1609	2142	2780	3535	4415	5430	6590	7905	9384
Fig. 107.														
	H = 8,6 c	10,3	12,0	13,8	15,5	17,2	18,9	20,6	22,4	24,1	25,8	27,5	29,2	31,0
	ΣXy = 189	326	518	773	1100	1509	2008	2608	3315	4141	5093	6181	7414	8800
Fig. 108.														
	H = 7,9 c	9,5	11,0	12,6	14,2	15,8	17,4	19,0	20,5	22,1	23,7	25,3	26,9	28,4
	ΣXy = 175	303	481	717	1021	1401	1864	2421	3078	3844	4728	5738	6883	8171

Remarque. L'effort dans les fibres extérieures est calculé à 600 kilogr. par cent carré.
La hauteur H est exprimée en centimètres, ΣXy en kilogrammètres.

correspondant, la hauteur et le poids par mètre courant devant être surtout pris en considération.

95. Pour toutes les sections de poutres qui sont formées par *deux nervures* (supérieure et inférieure), on peut employer les formules approximatives 38) et 39).

Prenant les dimensions indiquées par la fig. 99 (page 149), si l'on nomme:

$\mathfrak{A}$ l'effort de tension maximum dans les fibres extérieures,

$\mathfrak{B}$ l'effort de compression maximum dans les fibres extérieures opposées,

$\mathfrak{H}_0$ la distance des centres de gravité des nervures (point d'application des résultantes des pressions et des tensions,

Θ le moment d'inertie de la section,

$\mathfrak{M}$ le moment de flexion pour la coupe qu'on considère, on aura d'après le N°. **16**:

$$\Theta = \mathfrak{H}_0\, a_0\, (\Omega_a + {}^1/_3\, \delta a_0) = \mathfrak{H}_0\, b_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3}\delta b_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 149)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\mathfrak{H}_0\, a_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta a_0\right) = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\mathfrak{H}_0\, a_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta b_0\right) \\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{B}}{b}\,\mathfrak{H}\, b_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3}\delta b_0\right) = \frac{\mathfrak{B}}{b}\,\mathfrak{H}_0\, b_0 \left(\Omega_b + {}^1/_3\,\delta a_0\right) \end{aligned}\right\} \quad 150)$$

Pour *des sections à double* $\top$, *symétriques*, cette équation est mathématiquement exacte (voir équation 37); si l'on nomme:

b la largeur de la nervure,

t la hauteur,

H la hauteur totale de la poutre,

h la distance dans œuvre des nervures,

$\mathfrak{H}_0 = \dfrac{H + h}{2}$ la distance des centres de gravité des nervures,

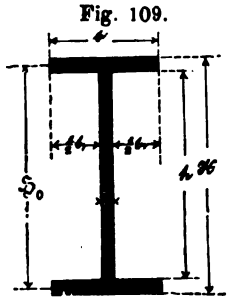
Si l'on observe encore, que

$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$,

$b = a = \dfrac{1}{2}\,H$,

$b_0 = a_0 = \dfrac{1}{2}\,\mathfrak{H}_0$,

Fig. 109.



on obtient d'après les équations 146) et 147)

$$\Theta = \frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{2}\left(bt + \frac{1}{6}\,\delta\,\mathfrak{H}_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad 151)$$

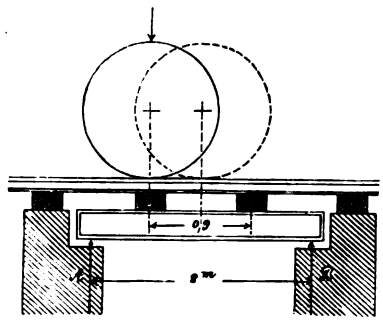
$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H}\left(bt + \frac{1}{6}\,\delta\,\mathfrak{H}_0\right) \quad . \quad . \quad 152)$$

A ne devra pas dépasser 600, si dans les formules précédentes 149) à 152), le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes.

96. Les poutres homogènes en fer forgé sont surtout employées pour de petits ponts (en dessous de 7 mètres).

Dans les *ponts de chemins de fer,* il se trouve le plus souvent une poutre sous chaque rail, donc pour une voie, deux poutres; nous calculerons toujours $\mathfrak{M}$ pour une voie. Nous prendrons, comme ci-dessus, 12 tonnes par axe pour poids des roues motrices éloignées de 2 mètres. D'après ces données, nous voulons calculer les moments de flexion $\mathfrak{M}$ pour une série de petits ponts, et nous verrons qu'il existe une différence notable si la poutre est chargée directement, ou si elle l'est au moyen de traverses.

Fig. 110.

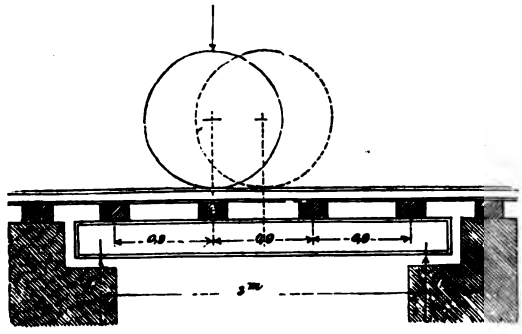


Pour 2 M. de portée et pour une charge directe, on a:

$$\max \mathfrak{M} = \frac{12 \cdot 2}{4} = 6 \text{ tonnes-mètres}$$

dans l'emploi de traverses, le moment de flexion maximum se produit lorsque l'axe se trouve sur l'une d'elles: on a

Fig. 111.



$$\text{pression sur l'appui } A = \frac{12 \cdot 1{,}45}{2{,}00} = 8{,}7 \text{ ts}$$

$$\max \mathfrak{M} = 8{,}7 \times 0{,}55 = 4{,}785 \text{ tonnes-mètres}$$

pour 3 M. de portée, dans le cas d'une charge directe

$$\max \mathfrak{M} = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \text{ tonnes-mètres}$$

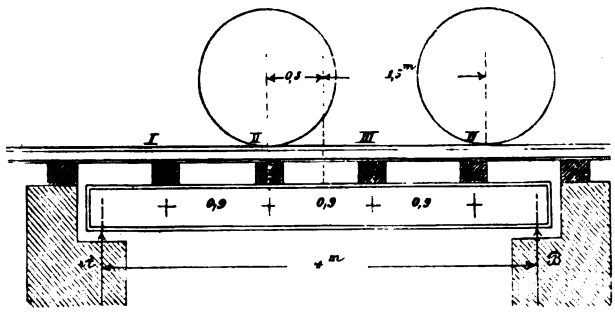
lorsqu'on emploiera des traverses, on aura encore le max. du moment de flexion dès qu'un axe se trouvera immédiatement au-dessus d'une traverse, (puisque la dernière traverse près de B supporte aussi une partie de la charge de la seconde roue de la locomotive)

$$\text{Pression sur la culée } A = \frac{12 \cdot 1{,}95 + 9{,}333 \cdot 0{,}15}{3{,}0} = 8{,}266 \text{ ts}$$

$$\max \mathfrak{M} = 8{,}27 \times 1{,}05 = 8{,}68 \text{ tonnes-mètres.}$$

Pour 4 M. de portée, il faut prendre 2 axes sur le pont; leur position la plus défavorable aura lieu lorsque l'éloignement de l'un deux du milieu du pont, sera égal au $^1/_4$ de la distance d

Fig. 112.



des roues motrices; le moment d'inertie pour une charge directe est, d'après le 13ème cas de la table XXVIII:

$$\max \mathfrak{M} = \frac{P\,(21 - d)^2}{81} = \frac{12 \cdot 36}{32} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ tonnes-mètres.}$$

Lors de l'emploi de traverses, pour une même position des axes, la traverse II. est chargée de 11,33 tonnes, la traverse I. de 0,67 tonne et la traverse IV. de 10 tonnes, ensorte qu'on aura:

Pression sur la culée

$$A = \frac{2{,}45 \cdot 11{,}33}{4} + \frac{0{,}67 \times 3{,}35}{4} + \frac{0{,}65 \cdot 10}{4} = 9{,}125 \text{ ts}$$

$$\max \mathfrak{M} - = 9{,}125 \cdot 1{,}50 - 0{,}67 \cdot 0{,}85 = 13{,}12 \text{ tm}$$

a différence de 0,38 tm est contenue dans les rails, vu que l'axe de la roue ne se trouve pas immédiatement au-dessus d'une traverse. Nous avons calculé la table XXX d'après les suppositions faites ci-dessus; elle donne pour chaque portée et pour une voie, la grandeur correspondante max $\mathfrak{M}$ en kilogrammètres. — Les

moments de résistance qui y correspondent, sont contenus, pour des poutres à double ⊤, dans la table XXIX.

Table XXX.

Charge par roue motrice 12 ts. distance des axes 2 M.

Portée:		1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	3,0
max M	avec traverses.	1575	2464	3281	4050	4785	5495	6187	7200	8680
	reposant directement.	3600	4200	4800	5400	6000	6600	7500	8100	9000
Portée:		3,3	3,6	4,0	4,5 m	5,0 m	5,5 m	6,0 m	6,5 m	7,0 m
max M	avec traverses.	10180	11310	13475	16319	20034	23419	28236	33000	38000
	reposant directement.	9900	11267	13500	16333	21000	25500	30000	34500	39000

Les moments seront notablement plus grands, lorsque la distance entre les axes diminuera, la charge restant la même; dans la table XXX[a], nous avons pris pour nos calculs 3 roues motrices, chacune du poids de 12 tonnes et à 1,5 M. de distance d'axe à axe (ce qui correspond à peu près à la machine à marchandises prise pour la table XVII[a]).

Table XXX[a].

charge par axe 12 ts. distance des axes 1,5 M.

Portée:		1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	3,0
max M	avec traverses.	1650	2643	3587	4500	5390	6164	7552	8400	10080
	reposant directement.	3600	4200	4800	5400	6000	6600	7500	8666	10125
Portée:		3,3	3,6	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7
max M	avec traverses.	11788	13500	16190	20880	25500	30172	34785	39377	43958
	reposant directement.	11823	14400	18000	22500	27000	31500	36000	40500	45000

Les moments des tables XXX et XXX[a] se rapportent tous à une seule voie; aussi, lorsqu'on aura deux poutres, ainsi que cela arrive ordinairement, il faudra prendre la moitié de ces valeurs; pour chaque poutre, il faut chercher dans la table XXIX un moment de résistance convenable, de valeur numérique égale au moment de flexion.

L'effort tranchant maximum n'aura pas lieu en même temps, mais toujours lorsque le premier axe de la locomotive est parvenu sur la culée, tandis que les autres axes chargent le pont. — Nous avons ainsi calculé la table XXX pour la valeur maximum de l'effort tranchant $\mathfrak{B}$. = La charge par axe moteur de la locomotive est encore de 12000 kilogr. et leur distance de 2 mètres; les valeurs de $\mathfrak{B}$ sont pour une voie, ensorte qu'en général une poutre n'aura que la moitié de ces valeurs à supporter.

Table XXXI.

Charge par axe 12 ts. Distance d'axe à axe 2 M.

Portée:	2,0 m	2,2 m	2,4 m	2,7 m	3,0 m	3,3 m	3,6 m
max $\mathfrak{B}$	12000	13091	14000	15111	16000	16727	17333
Portée:	4,0 m	4,5 m	5,0 m	5,5 m	6,0 m	6,5 m	7,0 m
max $\mathfrak{B}$	18000	20000	21600	22909	24000	24923	25714

Pour toutes les portées de moins de 2 m., $\mathfrak{B}$ max. doit être pris égal à 12000 kilogr. Dans les cas où la distance entre les axes n'est que de 1,5 m., la charge étant toujours de 12000 k., on obtient les valeurs suivantes pour une voie:

Table XXXI[a].

Charge par axe 12 ts. Distance d'axe à axe 1,5 M.

Portée:	1,6	1,8	2,0	2,2	2,1	2,7	3,0	3,3
max $\mathfrak{B}$	12750 k	14000 k	15000 k	15810 k	16500 k	17333 k	18000 k	19636
Portée:	3,6	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
max $\mathfrak{B}$	21000	22500	24000	25200	26182	27000	27692	28285

On a supposé dans les tables XXXI et XXXI[a] que la poutre était chargée directement; si l'on emploie des traverses, une partie de la force verticale est transmise directement sur la culée; cette dernière force devrait être déduite des valeurs de la table XXXI.

97. Les *poutres en fonte* sont d'un emploi toujours moins fréquent, les vibrations pouvant procurer facilement la rupture; du reste les poutres en fer forgé sont à bon marché et peuvent être construites sous toutes les formes voulues.

La fonte présente la particularité, que son module d'élasticité varie beaucoup dans le cas de fortes charges et qu'il est différent pour la tension et pour la compression (voir tables IV et V). Pour les limites des efforts de tension à adopter dans les constructions de pont, on pourra toutefois considérer ces deux modules comme égaux et nous avons pris comme valeur moyenne 900000 kilogr. par centim. carré.

La résistance de la fonte à la traction étant 5 ou 6 fois plus faible que celle à la compression, il est évident que pour des poutres homogènes, nous ne tiendrons compte que de la première, et l'équation 31) sera:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

$\mathfrak{A}$ ne doit pas être plus grand que 200, si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes; il existe pourtant d'excellentes fontes où l'on pourrait porter l'effort de tension jusqu'à 250 kilogrammes par cent. carré.

La résistance de la fonte à la compression étant plus grande que celle à la tension, on donne souvent aux nervures deux sections différentes, en prenant plus faible la nervure soumise à la compression. Pour ces *sections non-symétriques, à faibles parois*, Mr. E. Hodgkinsou donne la formule empirique suivante:

$$P = C.\frac{ah}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

dans laquelle:

l désigne la longueur d'une tige reposant librement sur deux appuis,

h sa hauteur,

a la section de la nervure soumise à l'effort de traction,

P le poids qui, placé au milieu, procurerait la rupture,

et si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes,

$$C = 4100 \text{ kilogr.},$$

d'où résulte un moment de rupture:

$$\mathfrak{M}_0 = 1025 \,.\, a \,.\, h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

Si l'on adopte comme poids $^1/_5$ du poids qui amène la rupture, ainsi que nous l'avons fait dans la table XII, cette équation 154)

coïncide assez bien avec les résultats de l'équation 31) et en effet si l'on néglige la paroi du milieu, la valeur $\frac{\Theta}{a}$ seconfond à-peu-près avec celle de a . h.

Comme pour des poutres homogènes en fer forgé, on détermine l'épaisseur de la paroi du milieu d'après les équations 46) et 47), en adoptant une valeur comme effort rasant horizontal dans les fibres invariables.

Si l'on représente par

$\mathfrak{S}_0$ l'effort rasant dans les fibres invariables,

δ l'épaisseur de la paroi du milieu,

$\mathfrak{V}$ l'effort tranchant à transmettre,

$\mathfrak{H}$ la distance des points d'application de la tension et de la compression,

d'après les équations 46) et 47), on aura:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 155)$$

Pour de bonnes fontes, $\mathfrak{S}_0$ ne doit pas être pris plus grand que 150, lorsque le tout est exprimé en kilogrammes et en centimètres, d'où résulte

$$\delta \gtrless \frac{\mathfrak{V}}{H} \cdot \frac{1}{150} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 156)$$

Une poutre en fonte ne peut supporter qu'une charge d'à-peu-près $^1/_3 - ^3/_7$ de celle que peut soutenir une poutre en fer forgé de même poids et de même hauteur.

98. *Poutres en acier fondu.* Vu le bon marché de l'acier fondu (surtout de celui de Bessemer), on a commencé à employer ce métal dans les constructions de ponts. La résistance de l'acier à la compression étant double de celle à la tension, il nous faudra tenir spécialement compte de cette dernière, et l'équation 31) est, ainsi que pour la fonte:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a} \cdot \Theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 31)$$

Pour l'acier Bessemer, $\mathfrak{A}$ ne doit pas être pris plus grand que 1000 lorsque le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes; nous avons ici en vue l'acier doux ou non trempé.

Nous choisissons comme exemple, le rail de la London Metropolitan Railway, représenté dans la planche VIII, d'un moment d'inertie Θ et $\frac{\Theta}{a}$ déterminé d'après le mode indiqué dans le N°. **17**, comme le montre en détail la table VIII.

Pour une charge qui produit une *tension* dans le *champignon*, nous avons trouvé:

$$\mathfrak{M} = 8{,}715\ \mathfrak{A}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I.}$$

où $\mathfrak{A}_0$ représente l'effort de tension maximum par pouce carré et exprimé en pouces anglais; de même lorsque le *patin* est soumis à la *tension*, on a :

$$\mathfrak{M} = 11{,}4\ \mathfrak{A}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Des recherches faites pour le premier mode de charge ont donné une charge de rupture de 22 tonnes pour une portée de 5 pieds soit 60 pouces anglais, d'où résulte $\mathfrak{M} = \frac{22 \cdot 60}{4} = 360$ pouces-tonnes et $\mathfrak{A}_0 = 38$ tonnes anglaises.

De même, le patin étant soumis à la tension, on a obtenu une charge de rupture de 29,17 tonnes, d'où $\mathfrak{A}_0 = 38{,}4$ tonnes par pouce carré soit 6048 kilogr. par cent. carré.

Le coefficient de rupture à la tension de cette matière était de 35 tonnes soit 5512 kilogr. par cent. carré, et nous devons faire remarquer que c'était de l'acier doux; (voyez page 57 pour l'augmentation de la résistance à la tension de corps prismatiques soumis à la flexion).

La distance l des points d'appui, sera pour ce rail chargé de roues de locomotives d'un poids de 12 tonnes par axe et lorsque la matière doit être soumise à un effort de 1000 kilogr. au plus par cent. carré, soit de 7 tonnes par pouce carré anglais :

$$l = \frac{7 \cdot 11{,}4 \cdot 4}{6} = 53{,}2 \text{ pouces, soit } 4{,}4 \text{ pieds anglais.}$$

Il est à remarquer que ce résultat sera un peu modifié, si l'on tient compte de ce que le patin du rail est foré, afin de donner passage aux boulons d'assemblage, ce que nous avons négligé.

Remarque. Les données numériques sont tirées du journal Engineering 1868, où le moment de résistance est calculé de la même manière que nous l'avons fait.

99. Les *poutres homogènes en bois* sont ordinairement de coupe rectangulaire, — ensorte que l'équation 31) se simplifie sensiblement.

Si l'on désigne par

h la hauteur de la poutre,
b sa largeur,
$\mathfrak{M}$ le moment de flexion,
$\mathfrak{A}$ l'effort de tension longitudinal maximum

on a

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{1}{6} b h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 157)$$

$\mathfrak{A}$ ne doit pas dépasser 70 kilogr. si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes. Ceci est du reste une valeur moyenne,

car les bois présentent des résistances bien différentes qui dépendent de l'espèce et de l'âge du bois; on prend ordinairement comme charge à adopter le $^1/_{10}$ de celle qui produit la rupture.

§ 12.

Ponts à parois en tôle.

100. Les ponts à parois en tôle diffèrent des poutres homogènes en fer en ce qu'ils sont formés de diverses pièces, parois en tôle, nervures, cornières etc.; c'est pour cela que leurs formes et leurs dimensions sont à-peu-près illimitées; chaque pièce peut être construite de manière à répondre au but proposé.

Les mêmes formules trouvées pour les poutres homogènes nous serviront encore à déterminer les dimensions des nervures et des parois en tôle pour des *poutres horizontales et rectilignes.*

Si nous nommons pour une coupe x:

$\mathfrak{M}$ le moment de flexion des forces extérieures,
$\mathfrak{B}$ l'effort tranchant,
$\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) l'effort de tension (pression) horizontale maximum dans les fibres extérieures,
$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) la distance de la ligne des fibres neutres aux fibres longitudinales extérieures soumises à la tension (pression),
$\mathfrak{a}_0$ ($\mathfrak{b}_0$) la distance de la ligne des fibres invariables au centre de gravité des nervures soumises à la tension (compression),
$\mathfrak{H}_0$ la distance des deux centres de gravité des nervures,
$\mathfrak{H}$ la distance des points d'application de la tension et de la compression,
Θ le moment d'inertie de la section,
δ l'épaisseur de tôle de la paroi verticale,
Ω_a (Ω_b) la section de la nervure soumise à la tension (pression),
$\mathfrak{S}_0$ l'effort rasant dans les fibres invariables, on a d'après l'équation 31),

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

La détermination du moment d'inertie Θ est souvent fort longue pour des sections compliquées, aussi peut-on employer avec avantage les formules approximatives du N°. **95**:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{a}_0\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{a}_0) \\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{b}_0\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{b}_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 150)$$

D'après l'équation 31), on peut remplacer $\frac{\mathfrak{A}}{a}$ par $\frac{\mathfrak{B}}{b}$ et vice-versâ; pour des sections symétriques ou du moins à-peu-près symétriques, cette formule approximative est suffisamment exacte et devient:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H}\,(\Omega_a + {}^1/_6\,\delta\mathfrak{H}_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 158)$$

équation identique à la formule 152).

$\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ ne doit pas dépasser 700 kilogr. lorsque le tout est exprimé en kilogrammes et en centimètres.

D'après la formule 144) du N°. **92**, on a pour la détermination de l'épaisseur de la paroi verticale

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

$\mathfrak{S}_0$ ne doit pas dépasser 350 si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes, d'où résulte

$$\delta \gtrless \frac{1}{350}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145)$$

101. Pour des poutres *à nervures cintrées ou à nervures non-parallèles*, les formules que nous avons développées jusqu'ici devront subir une modification, car nous avons toujours supposé que la section était normale aux fibres longitudinales. — Nommons

Q' la force dans la nervure soumise à la tension,
Q_y' la composante verticale de cette force,
α' l'angle que fait avec l'horizon la nervure soumise à la tension,
Ω_a la section perpendiculaire de la nervure pressée,

de même

Q'' la force de la nervure soumise à la compression,
Q_y'' la composante verticale de cette force,
α'' l'angle que fait avec l'horizon la nervure soumise à la compression,
Ω_b la section perpendiculaire de la nervure soumise à la compression.

En plaçant le bras de levier de la résultante à la traction $= \mathfrak{H}_0 \cos \alpha'$, d'après l'équation 150) on a:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\frac{a_0}{a}\,\mathfrak{H}_0 \cos\alpha'\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta a_0) \quad . \quad . \quad . \quad 159)$$

de plus

$$Q' = \Omega_a \cdot \mathfrak{A} \frac{a_0}{a} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

et d'après I. et 159), il résulte que

$$Q' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha'} - \frac{1}{3} \delta a_0 \frac{a_0}{a} \mathfrak{A} \quad \ldots \quad \text{II.}$$

$$Q_y' = \sin \alpha' \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha'} - \frac{1}{3} \delta a_0 \frac{a_0}{a} \mathfrak{A} \right\} \quad \ldots \quad \text{III.}$$

de même (d'après l'équation 150)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \frac{b_0}{b} \mathfrak{H}_0 \cos \alpha'' (\Omega_b + {}^1/_3 \delta b_0) \quad \ldots \quad 159^a)$$

$$Q'' = \Omega_b \mathfrak{B} \frac{b_0}{b} \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

et il résulte de 159^a) et de IV. que

$$Q'' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha''} - \frac{1}{3} \delta b_0 \frac{b_0}{b} \mathfrak{B} \quad \ldots \quad \text{V.}$$

$$Q_y'' = \sin \alpha'' \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha''} - \frac{1}{3} \delta b_0 \frac{b_0}{b} \mathfrak{B} \right\} \quad \text{VI.}$$

L'effort maximum de tension $\mathfrak{A}$ (ou de compression $\mathfrak{B}$) qui existe dans la nervure, se calculera d'après l'équation ci-dessus 159) ou 159^a); $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ ne doit pas dépasser 700, lorsque le tout est exprimé en kilogrammes et en centimètres.

Nous devrons avoir recours aux équations IV. et VI. pour déterminer l'effort rasant dans la paroi verticale.

Puisque l'effort tranchant est supporté en partie par la composante verticale des forces des nervures, la force $\mathfrak{B}_1$ que les forces rasantes de la section verticale ont à supporter, sera d'autant plus petite, et l'on a:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} - Q_y' - Q_y'' \quad \ldots \quad \text{VII.}$$

d'où résulte comme force rasante horizontale dans les fibres neutres:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{B} - Q_y' - Q_y''}{\mathfrak{H} \delta} \quad \ldots \quad 160)$$

Q_y' et Q_y'' doivent être pris dans les équations ci-dessus III. et IV.

$\mathfrak{S}_0$ ne doit pas dépasser 350, si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes, d'où résulte

$$\delta > = \frac{1}{350} \frac{\mathfrak{B} - Q_y' - Q_y''}{\mathfrak{H}} \quad \ldots \quad 161)$$

On devra prendre dans les calculs des *valeurs simultanées* de $\mathfrak{V}$ et de $\mathfrak{M}$ pour la détermination de l'épaisseur de la paroi, puisque ces dernières valeurs influent sur celles de Q′ et de Q″.

102. Dans toutes les règles ci-dessus, nous admettons toujours que la *diminution pour les logements des rivets* ou pour des assemblages imparfaits a été opérée. — En général, nous renvoyons au résumé du N°. **55**, où sont consignées les règles sur les assemblages avec des rivets; toutefois nous pouvons faire encore quelques observations.

Les rivets qui relient les diverses parties des nervures sont ordinairement assez rapprochés les uns des autres et d'un diamètre tel, qu'il ne résultera pas d'autres affaiblissements aux joints.

On peut encore obtenir cette condition, en plaçant les rivets près de l'arête du couvre-joint de même diamètre que ceux qui se trouvent sur toute la longueur de la poutre, et en ne renforçant que les rangées intérieures de rivets, soit par un diamètre plus grand, soit par le nombre, ces rangées n'ayant plus à supporter la force entière; pour l'affaiblissement de tôles assemblées, on doit premièrement considérer la rangée de rivets qui se trouve le plus près du bord du couvre-joint, (voir N°. **55**).

On s'assurera si un joint est suffisant d'après le développement du N°. **55**; en général le couvre-joint ou les rivets ne doivent pas subir un effort plus grand que celui des tôles assemblées; si ces dernières étaient plus fortes que le calcul ne l'exige, une dimension correspondant à la résistance de la matière suffira pour le joint.

103. *L'assemblage des tôles de la paroi verticale* exige une recherche spéciale. L'épaisseur de la paroi, calculée d'après les formules 145) et 161), est en général plus faible que celle adoptée dans l'exécution, il existe aussi un minimum d'épaisseur, (variable avec la hauteur de la poutre) réclamé par les voilements de faibles tôles, ainsi que par les influences hygrométriques; les résultats de la formule 145) ne seront en général rigoureusement applicables que pour de petits ou de très-grands ponts; ordinairement la paroi recevra un surcroît d'épaisseur pour mieux résister au cisaillement.

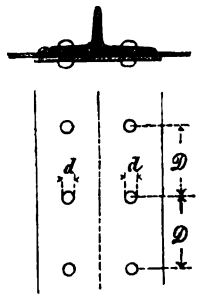
On peut toutefois calculer la distance nécessaire des rivets pour un joint vertical *indépendamment de l'épaisseur de la paroi.* — La force rasante horizontale nous servira à cet effet; d'après l'équation 48), les forces rasantes verticale et horizontale par unité de longueur sont égales pour un élément donné.

On a, d'après l'équation 46), pour la force rasante horizontale par unité de longueur:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

dans cette formule, $\mathfrak{H}$ indique la distance des points d'application des tensions et des pressions de la section entière. Cette force, qui diminue peu en s'approchant des nervures, peut être considérée comme constante sur toute la hauteur et doit être transmise par les rivets de la paroi, aussi comptés par unité de longueur; ces rivets sont soumis au cisaillement double, puisqu'on a toujours un couvre-joint (ou fer en $\top$) des deux côtés; si l'on désigne par

Fig. 113.



d le diamètre des rivets,
$\mathfrak{C}$ l'effort de tension à adopter pour les rivets,
n le nombre des rivets par unité de longueur,
D la distance des rivets, qui est de $\frac{1}{n}$ par unité de longueur,

il en résulte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = 2n \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot \mathfrak{C} \\ D &= \mathfrak{C}\,\frac{2\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 162)$$

$\mathfrak{C}$ ne doit pas dépasser 600, si le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes ($\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{H}$ peuvent être exprimés, non seulement en centimètres, mais bien aussi en fonction d'une autre mesure, en mètres par exemple). Nous supposons ici du fer excellent et une exécution soignée.

Lorsque la formule 145) servira à *déterminer la dimension de la paroi pour le cas du cisaillement*, il faudra augmenter un peu cette épaisseur de paroi afin de tenir compte de l'affaiblissement produit par les rivets; lorsque l'épaisseur est déterminée d'après la formule 145), on peut calculer directement la distance entre les rivets; la formule 145) donne une épaisseur de tôle telle, que l'effort rasant dans la tôle est de 350 kilogr. tandis que nous avons adopté 600 kilogr. par centimètre carré pour les rivets, ensorte qu'on a, sur la distance D entre deux rivets, (les notations précédentes étant maintenues) pour la

Résistance d'un rivet:

$$2 \cdot 600 \cdot \frac{d^2\pi}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Résistance de la tôle comprise entre deux rivets:

$$(D - d)\,\delta \cdot 350 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

d'où résulte, d'après I. et II.

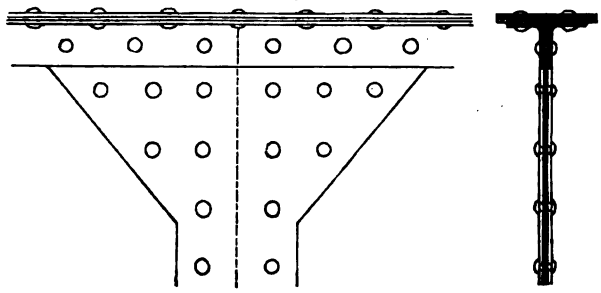
$$D = \frac{\pi d^2 + 1{,}19\,\delta\,d}{1{,}16\,\delta} \quad \ldots\ldots \quad 163)$$

Si, par exemple, $d = 2\delta$, il s'en suit que $D = 6{,}3d$ et dans ce cas la tôle sera affaiblie de $\frac{1}{6{,}3}$. — Les équations 162) et 163) donnent le même écartement D lorsque le diamètre des rivets d est le même dans les deux cas, supposé que dans le dernier cas, δ soit calculé d'après l'équation 145).

Les considérations faites jusqu'ici ne sont plus applicables pour les parties de la paroi qui se trouvent près des nervures, car les mêmes rivets qui supportent la force rasante de la paroi ci-dessus indiquée ont encore à supporter l'effort de tension longitudinale renfermé dans les nervures, aussi les joints de la paroi verticale doivent-ils recevoir *deux* rangées de rivets à l'endroit où la nervure et la paroi supportent des efforts maxima simultanés.

Ces doubles rangées de rivets ne sont nécessaires que dans le voisinage de la nervure, aussi a-t-on employé la disposition indiquée par la fig. 114 quoiqu'elle soit coûteuse dans l'exécu-

Fig. 144.



tion lorsqu'il ne sera pas possible de former les couvre-joints de plusieurs feuilles, par exemple pour des tôles d'une hauteur assez grande.

104. Les rivets qui *réunissent l'âme avec la nervure* ont à transmettre la force rasante à cet endroit, laquelle peut être calculée d'après l'équation 45); l'emploi de cette équation n'est pas très-commode; nous avons calculé cette force pour deux exemples (voir les planches I et VII et les N^os^. **27** et **28**) et nous avons trouvé que la grandeur de l'effort rasant près de la nervure, comparé à l'effort rasant longitudinal $\mathfrak{S}_0$ dans les fibres neutres, est

pour un pont de 15 mètres d'ouverture . . . 0,735—0,8 $\mathfrak{S}_0$
pour un pont à 3 travées de 67 mètres d'ouverture moyenne (pont de Langon) . . . . . 0,817 $\mathfrak{S}_0$

On n'exagérera pas en prenant l'effort rasant près de la nervure égal aux $^4/_5$ de celui existant dans les fibres neutres; on prendra donc comme maximum d'écartement D des rivets qui réunissent l'âme et la nervure, les $^5/_4$ de celui trouvé par l'équation 45) comme distance des rivets pour les autres joints de la paroi, d'où résulte

$$D, = 1{,}25 \cdot \mathfrak{C} \cdot \frac{2\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 164)$$

$\mathfrak{C}$ ne doit pas dépasser 600 lorsque le tout est exprimé en centimètres et en kilogrammes.

105. Les parois verticales, vu leur faible épaisseur comparée à leurs autres dimensions et la forte pression qu'elles ont à supporter, doivent être protégées contre le voilement par des carlingues ou nervures rigides. Ces renforts seront surtout nécessaires, si l'épaisseur de la paroi n'est pas plus grande que celle qui résulte des formules ci-dessus indiquées.

La rigidité des parois verticales s'obtient ordinairement au moyen de *soutiens verticaux* composés de cornières, de fers en ⊤ ou d'une combination de diverses sortes de tôle. Pour le pont de Britannia, la distance des nervures en forme de ⊤ de 20 à 26 pieds de hauteur a été prise de 2 pieds anglais; pour le pont de Langon de 5,5 mètres de hauteur de paroi, la distance des nervures verticales a été prise de 0,86 mètre; pour des ponts à hauteur de poutres plus faible, on peut augmenter l'écartement des nervures verticales ensorte que la surface de paroi comprise entre les nervures et les carlingues restera à-peu-près la même.

Pour de grands ponts, où la distance des nervures verticales est faible, on fera économie de métal en employant des carlingues de faible dimension entre les nervures verticales principales; ces dernières servent à recevoir les entretoises, dont la position détermine celle des nervures verticales principales; en pratique, il s'agira souvent d'étudier si une ou plusieurs nervures verticales sont nécessaires entre les entretoises.

Lorsque la charge repose sur la nervure supérieure de la poutre, la moitié de la charge doit être transmise à la nervure inférieure par l'intermédiaire de la paroi verticale qui, pour cette raison, tend à se plisser encore davantage. La transmission de cette force peut avoir lieu par l'intermédiaire de ces mêmes nervures, ou bien aussi au moyen de nervures spéciales.

106. Les *armatures verticales sur les piles*, (aussi nommées montants verticaux,) sont importantes. Elles ont à supporter toutes les forces qui agissent de tous côtés dans la paroi et à transmettre sur les piles principalement les composantes verticales de ces forces. — S'il n'existe qu'une seule armature sur la pile, cette

dernière doit supporter la pression entière sur l'appui; sa section doit donc être calculée d'après cette condition; (nous rappellerons ici que les efforts tranchants ont toujours été calculés pour une voie, ensorte qu'il faudra les réduire pour une poutre).

S'il existe plusieurs armatures, il faut savoir d'abord de quelle façon est répartie la force à transmettre; c'est surtout le changement de forme de la poutre qui influe, et de la flexion de la poutre résulte une tendance de pression sur l'arête de la pile; nous avons déjà fait remarquer dans le N°. **85**, que le point central de la pression pouvait être éloigné de l'arête de la pile par un arrangement convenable des armatures; il s'agit de déterminer la position de la résultante de la réaction sur la pile lorsque le mode de répartition des armatures est donné.

Il sera surtout très-difficile pour les poutres continues, de déterminer la charge qu'une armature aura à supporter; l'effet est ici réciproque, car d'un côté, la force à laquelle une armature doit résister dépend de la forme de la ligne élastique et de l'autre, cette dernière dépend de la disposition des armatures.

Lorsqu'il n'existe aucune armature sur les piles, la paroi doit reporter la pression totale sur toute la surface d'appui de la poutre; lorsque cette pression agit principalement sur l'arête, il peut résulter un voilement de la paroi; pour de grandes poutres, il est donc absolument nécessaire de construire des armatures verticales sur les piles, et c'est une faute de construction lorsque les dimensions de ces armatures ne sont pas suffisantes. Pour des ponts à parois en tôle, ces armatures verticales consistent en des cornières ou en des fers en $\top$ rivés, et l'on doit ajouter à leur section la portion de la paroi verticale qui se trouve immédiatement au-dessus de la pile.

107. Pour les *faibles* ouvertures, jusqu'à 7 mètres, les tables XXX et XXXI contiennent les *valeurs maxima* de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$ (tandis que le calcul des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ est contenu en détail dans le troisième chapitre).

Pour de *grandes ouvertures* il est important de pouvoir déterminer rapidement les valeurs de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{M}$ pour une coupe quelconque; nous avons calculé à cet effet les charges q et q' uniformément réparties qui équivalent à un train de chemin de fer, elles sont résumées, pour *une poutre reposant librement sur deux appuis*, dans les tables XVII. On doit faire usage des valeurs de q' dans le cas d'une charge partielle; les efforts tranchants maxima sont donnés par l'équation 96), les moments de flexion qui y correspondent par l'équation 97); ordinairement, pour la charge partielle, on n'aura à considérer que les valeurs de $\mathfrak{B}$ (surtout celles pour le milieu du pont et sur la pile).

Remarque. On a pris la charge sur une des moitiés du pont pour calculer q' dans les tables XVII, tandis que q correspond à la charge totale; pour des

charges intermédiaires, la charge uniformément répartie est une moyenne qui se rapproche soit de q soit de q' suivant la répartition de la surcharge moyenne.

Pour une charge uniformément répartie, chaque $\mathfrak{V}$ et chaque $\mathfrak{M}$ doivent être calculés d'après les équations 92a) et 93a); lors de la charge totale, la grandeur absolue maximum de $\mathfrak{M}$ se trouve toujours égale à $\frac{ql^2}{8}$.

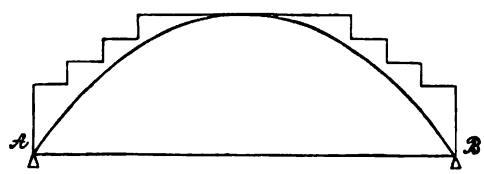
Les représentations graphiques de la planche II montrent clairement les variations des valeurs $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$. — Pour les cas spéciaux, on se servira des équations 100)—102) du N°. **63.**

Pour des *poutres continues*, on prendra la valeur q dans la table XVII ou XVIIa; d'après l'équation 106) ou 107) on détermine les pressions sur les appuis pour 2 travées et, dans le cas d'abaissement des appuis, d'après les équations 117) et 118); pour 3 travées, d'après les équations 123) et 124) et lors de l'abaissement des appuis, d'après les équations 131) et 132); $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ se trouveront d'après les équations 108)—109a); les N°s **73** et **78** contiennent les règles pour le calcul des valeurs principales.

On ne doit employer les poutres continues que pour de grandes portées et l'on considérera chacune d'elles comme chargée uniformément, (le mode de calcul reste toujours le même lorsque la charge par unité de longueur est déterminée).

Lorsque chacune des valeurs $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ est connue pour toutes les coupes — d'après la représentation graphique des planches II—V, on calculera les *sections des nervures* et les *épaisseurs des parois verticales* d'après les formules pratiques 143), 150) et 152), et pour des nervures cintrées, d'après les formules 159) et 161). C'est en choisissant des sections de nervures convenables, qu'on obtient un même maximum d'effort de tension longitudinale sur toute la longueur de la poutre; on fait varier la section des nervures en prenant un nombre plus ou moins grand de plaques de tôle, ou bien en employant des cornières d'épaisseur variable; la variation de coupe des nervures est alors irrégulière, en escalier,

Fig. 116.



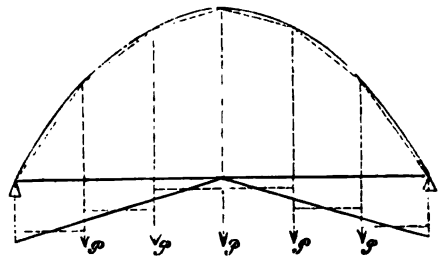
tandis que les moments de flexion varient d'une manière continue; la fig. 116 représente cette variation irrégulière de la section de la

nervure qui doit, pour une poutre droite, se rapprocher le plus possible de la parabole des moments de flexion et de façon que l'effort longitudinal de la section moyenne ne soit nulle part dépassé; il est à désirer que la tension longitudinale diminue en se rapprochant des culées, vu que le plus grand effort oblique dans la paroi verticale, lequel ne doit pas dépasser le plus grand effort longitudinal, y subit l'influence d'efforts tranchants relativement plus grands.

108. Jusqu'ici nous avons supposé tous les $\mathfrak{B}$ et tous les $\mathfrak{M}$ agissant dans la poutre principale, ce qui n'est exact que lorsque la charge se trouve directement au-dessus de la poutre; mais ordinairement les surcharges reposent sur des entretoises, entre lesquelles la charge est supportée par des poutrelles en long (longrines-sous-rails); ces dernières renferment une partie du moment de flexion, le moment sera donc diminué dans les poutres principales. Lorsque les poutrelles en long reposent librement sur les points chargés, le moment de flexion $\mathfrak{M}$ de la poutre principale est en ces points le même que si la charge agissait immédiatement sur la poutre; si l'on veut représenter d'une manière graphique les moments qui agissent sur la poutre principale, il faut joindre entre eux les points de la courbe des $\mathfrak{M}$ appartenant aux entretoises, par des arcs de parabole légèrement courbés qui correspondent au propre poids de la poutre principale et auxquels on peut substituer sans grande erreur des lignes droites. Les moments $\Delta\mathfrak{M}$ qui se trouvent entre le polygone ainsi formé et la courbe des $\mathfrak{M}$, doivent être supportés par le moment de résistance des poutrelles en long (et suivant les cas par les rails eux-mêmes).

La fig. 117 représente graphiquement la modification des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ qui résulte de la charge maximum uniformément répartie;

Fig. 117.



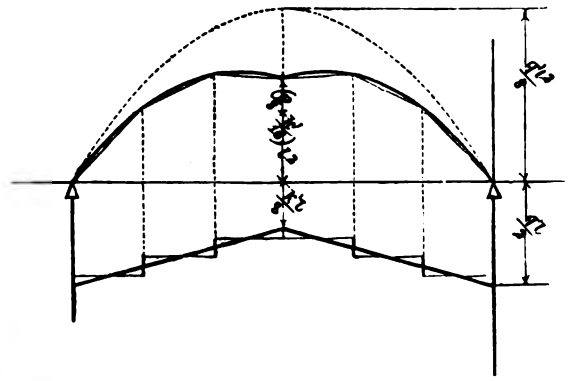
$\mathfrak{B}$ reste constant entre deux entretoises et est égal au $\mathfrak{B}$ du milieu du panneau calculé sans qu'on ait tenu compte des entretoises.

La fig. 118 représente de même l'influence de la charge des entretoises pour le cas d'une charge partielle; tous les $\mathfrak{B}$ maxima

ont été déterminés d'après les équations 96) et 96ª), et chaque $\mathfrak{M}$ simultanée d'après les équations 97) et 97ª), (dans beaucoup de cas, les représentations graphiques de la planche II peuvent servir à construire les courbes des $\mathfrak{B}$ et des $\mathfrak{M}$, la table XV donne chacune des ordonnées pour les 6 rapports $\frac{p}{q}$ employés.)

Nous faisons remarquer que, dans la fig. 118, les valeurs q' et k' correspondent à la charge partielle (voir les tables XVII et XVIIª

Fig. 118.

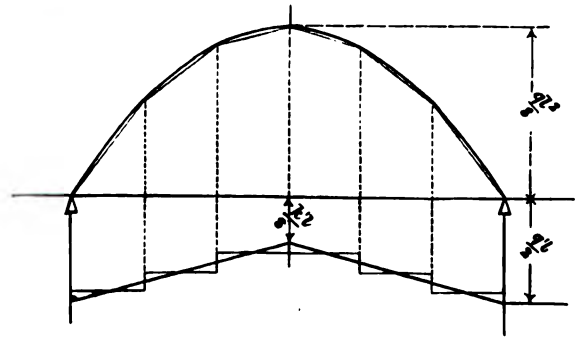


et qu'elles sont généralement plus grandes que celles de q et de k (voir la remarque page 169).

Ordinairement on n'aura pas à considérer les valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$, mais les valeurs maxima de $\mathfrak{M}$ suffisent à la *détermination des sections des nervures* et les valeurs maxima de $\mathfrak{B}$ à la *détermination de l'épaisseur de la paroi verticale.*

La fig. 119 représente ces valeurs maxima, tirées des fig. 117 et 118, (max $\mathfrak{M}$ de la fig. 117 et max $\mathfrak{B}$ de 118).

Fig. 119.



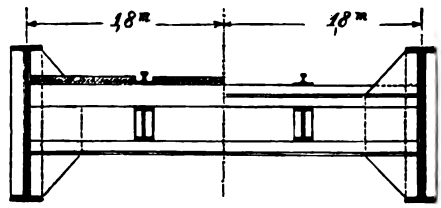
La courbe polygonale des $\mathfrak{M}$ et la courbe des $\mathfrak{V}$ en escalier dans la fig. 119, donnent directement à l'échelle les valeurs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{V}$ qu'on doit faire entrer dans les formules pratiques; on pourrait aussi répartir la charge sur les entretoises d'après la théorie du levier, et déterminer les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{V}$ d'après les équations 100)—102); on obtiendrait le même résultat en calculant chaque $\mathfrak{M}$ et chaque $\mathfrak{V}$ pour le système complet, et en déduisant les $\Delta\mathfrak{M}$ et les $\Delta\mathfrak{V}$ des entretoises d'après la méthode indiquée par les figures 117, 118 et 113.

§ 13.

Pont à poutres en tôle, de 15 mètres de portée.

109. Comme exemple d'un pont à poutres en tôle, nous choisirons celui d'un pont pour chemin de fer, dont la voie est soutenue par des longrines-sous-rails qui reposent sur des entretoises, ainsi que le représente la fig. 120; les dimensions et les détails de construction sont représentés dans la planche VI.

Fig. 120.



Nous avons pris pour le propre poids du pont 1075 kilogr. par mètre, (d'après la table XVII on devrait prendre comme valeur moyenne 1275 kilogr.), comme charge totale uniformément répartie $k = 4750$ kilogr. et comme charge partielle, $k' = 6080$ kilogr., charges qui correspondent à de lourdes machines à marchandises. Nous aurons donc $q = p + k = 5825$ et $q' = p + k' = 7155$ kilogr.

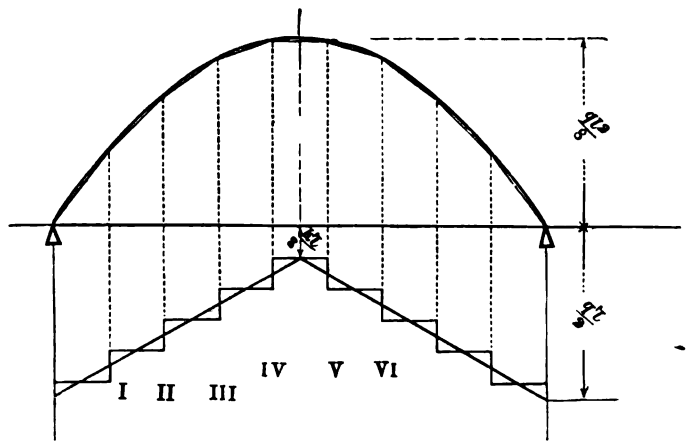
En portant, ainsi que nous l'avons fait dans la fig. 121, les $\mathfrak{M}$ max. au-dessus, les $\mathfrak{V}$ max. au-dessous de l'axe des abscisses, nous diviserons la longueur en 9 parties; nous modifierons les courbes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{V}$ d'après la méthode indiquée par la fig. 119, et nous calculerons les valeurs suivantes d'après les chiffres ci-dessus indiqués

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{5825 \cdot 225}{8} = 163828 \text{ kilogrammètres}$$

$$\frac{q'l}{2} = \frac{7155 \cdot 15}{2} = 53662{,}5 \text{ kilogr.}$$
$$\frac{k'l}{8} = \frac{6080 \cdot 15}{8} = 11400{,}0 \text{ kilogr.}$$

on obtient d'une manière graphique, d'après les propriétés connues

Fig. 121.



de la parabole et de la ligne droite, par la fig. 121 ou bien d'après le calcul (équations 92)—93[b]), la table suivante:

Table XXXII.

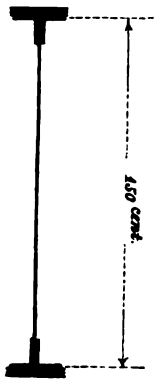
Entretoises.	0	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Abscisses en mètres.	0	$1^2/_3$	$3^1/_3$	5	$6^2/_3$	$7^1/_2$	$8^1/_3$
max $\mathfrak{M}$	0	64700	110000	145600	161800	161800	161800
max $\mathfrak{B}$	53662,5	44271	34880	25488	16096	11400	16096
au milieu du panneau		49271	39575	30184	20792	11400	

Les valeurs de la table XXXII, calculées pour *une voie*, doivent être réduites de *moitié* dans le calcul d'une poutre, les valeurs

ainsi réduites peuvent être employées directement pour déterminer les dimensions de la poutre principale.

110. La fig. 122 représente la forme de la coupe de la poutre principale adoptée préalablement; elle se compose d'une paroi verticale de 1,5 mètre de hauteur et de deux nervures formées chacune, au milieu du pont, de deux cornières et de trois feuilles de tôle; comme le centre de gravité de la nervure tombe à-peu-près sur l'extrémité de la paroi verticale, nous prendrons la hauteur de celle-ci $= \mathfrak{H}_0$, valeur qui entre dans la formule 150) comme distance des centres de gravité des nervures. Avant de pouvoir employer cette équation à la détermination des dimensions de la nervure, il faut connaître l'épaisseur de la paroi verticale.

Fig. 122.



On détermine *l'épaisseur de la paroi verticale* d'après l'équation 145); en estimant la distance $\mathfrak{H}$ des points d'application des pressions et des tensions, égale à $\frac{9}{10}\,\mathfrak{H}_0 = 1{,}35$ mètre, il résulte de l'équation 145) dans laquelle on remplacera les valeurs de max $\mathfrak{B}$ par celles contenues dans la table XXXII.

dans le panneau 0—I $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{49271}{350 \,.\, 135} = 0{,}52$ cent.

„ „ „ I—II $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{39576}{350 \,.\, 135} = 0{,}40$ „

„ „ „ II—III $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{30184}{350 \,.\, 135} = 0{,}32$ „

„ „ „ III—IV $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{20792}{350 \,.\, 135} = 0{,}22$ „

„ „ „ IV—V $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{11400}{350 \,.\, 135} = 0{,}12$ „

En tenant compte de l'affaiblissement de la paroi produit par les lignes de rivets, nous prendrons dans les deux panneaux extérieurs $\delta = 0{,}7$ cent., dans les 5 autres du milieu $\delta = 0{,}6$ cent.; cette dernière valeur sera prise comme minimum à cause des influences hygrométriques et de la résistance au voilement.

L'équation 158) donne pour *section de la nervure Ω au milieu de la poutre*

$$\Omega = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\,\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H}} - \frac{1}{6}\,\delta\mathfrak{H}_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 158)$$

Plaçant dans cette équation comme tension admise $\mathfrak{A} = 650$, $\mathfrak{H} = 150$, de plus $H = 156$ cent. en tenant compte de l'épaisseur

approximative des feuilles des nervures, $\delta = 0{,}5$ cent. vu l'affaiblissement produit par les rivets, on obtient:

$$\Omega = \frac{80900 \,.\, 1{,}56}{650 \,.\, 1{,}5^2} - \frac{0{,}5 \times 150}{6}$$

$$\Omega = 86{,}2 - 12{,}5 = 73{,}7 \text{ cent. carrés.}$$

Pour former cette section, nous prendrons comme dimension des cornières et des feuilles de tôle:

3 couches de feuilles de tôle, chacune de 22 c. de largeur		
0,9 „ d'épaisseur		
chacune donc de 19.8 cent. carrés, total		59,4 cent. carrés
2 cornières, chacune de 18 c. carrés, donc		36,0 „ „
ensemble		95,4 „ „
d'où l'on doit déduire		
2 rivets à travers les tôles de 1,8 c. d'épaisseur et de 3,7 cent. de longueur	13,32 c. carrés	
1 rivet à travers les cornières et la paroi verticale 1,8 × 2,6 . . .	4,86 „ „	
ensemble		18,0 „ „

reste donc comme section résistante $\Omega = 77{,}4$ cent. carrés

au lieu de 73,7 cent. qu'indique le calcul ci-dessus. — Vers les culées, on laissera varier le nombre des feuilles d'après les moments, en employant la méthode graphique représentée dans la fig. c de la planche VI.

La section de la nervure étant connue, $\mathfrak{H}$ se détermine d'après l'équation approximative 148).

Pour le milieu de la poutre principale, nous avons:

$$\mathfrak{H} = 150 \, \frac{12 \,.\, 77 + 2 \,.\, 0{,}5 \,.\, 150}{12 \,.\, 77 + 3 \,.\, 0{,}5 \,.\, 150} = 140{,}1 \text{ cent.}$$

pour les extrémités de la poutre principale, où l'épaisseur de la paroi verticale peut été prise de 0,6 cent., (après déduction faite pour les rivets, et où la section de la nervure après déduction de 2 couches de tôle, est encore de 46 cent. carrés), nous avons:

$$\mathfrak{H} = 150 \, \frac{12 \,.\, 46 + 2 \,.\, 0{,}6 \,.\, 150}{12 \,.\, 46 + 3 \,.\, 0{,}6 \,.\, 150} = 133{,}5 \text{ cent.}$$

Tandis que nous avons pris ci-dessus approximativement, en moyenne 135 cent.

Les formules 162) et 164) servent à la détermination de la *distance des rivets*, il faut considérer la section dans laquelle $\mathfrak{B}$ est

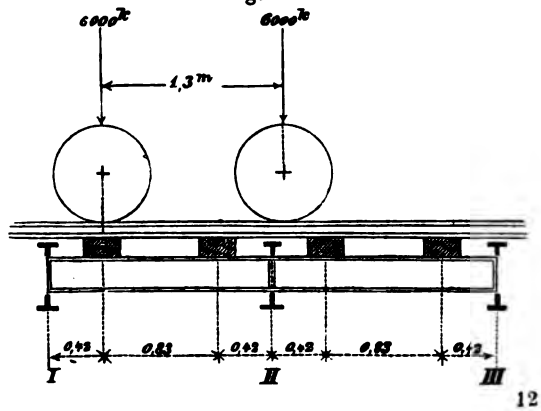
maximum et pour laquelle nous avons trouvé ci-dessus $\mathfrak{H} = 133{,}5$ cent. Admettons comme diamètre des rivets de la nervure et de la paroi verticale 1,8 cent.; l'équation 162) donne 16,25 cent. pour la distance verticale D des rivets du joint de la paroi verticale, et l'équation 164) donne 20,3 cent. pour la distance horizontale D′ des rivets de la nervure. Dans la construction, nous prendrons 13 cent. au lieu de 20,3 cent. de distance, parce que ces rivets servent en même temps à relier les diverses parties de la nervure et qu'ils seront soumis à des efforts encore plus grands près des joints.

En employant des couvre-joints des deux côtés, un rivet de 1,8 cent. de diamètre soumis à un effort de 600 kilogr., peut transmettre une tension ou une compression de 3060 kilogr.; chaque tôle horizontale, soumise à un effort longitudinal de 650 kilogr., doit résister à 11960 kilogr., force qui peut être transmise par 4 rivets soumis à un cisaillement double, qui auront chacun 2990 kilogr. à supporter. La longueur d'un des couvre-joints placés des deux côtés du joint, est donc $= 4\,D' = 52$ cent., la longueur d'un couvre-joint d'un seul côté, $8\,D' = 104$ cent.

Chaque joint des feuilles des nervures, des cornières et de la paroi verticale, est de même indiqué dans la fig. c de la planche VI; comme on le voit, les couvre-joints recouvrent deux joints (voir fig. 51) et doivent avoir, pour des rivets soumis au cisaillement double, au moins 78 cent. de longueur et pour des rivets soumis au cisaillement simple, au moins 156 cent. Les joints de la paroi verticale sont munis d'une double rangée de rivets, ainsi que nous l'avons vu dans le N°. **103**. Nous n'avons pas employé d'armatures verticales spéciales, parce que les cornières verticales servant de points d'attache des entretoises, renforcent en même temps d'une manière suffisante la paroi verticale de la poutre principale.

111. Nous avons encore à calculer quelques parties du tablier. On peut négliger le poids du tablier dans le calcul des *lon-*

Fig. 123.



grines-sous-rails; la charge maximum a lieu, lorsqu'une roue de la locomotive se trouve directement au-dessus d'une des traverses; pour ce cas, la pression A sur l'entretoise I. la plus voisine de la roue, est

$$A = \frac{1{,}25}{1{,}67} \cdot 6000 + \frac{0{,}42}{1{,}67} \cdot \frac{0{,}37}{0{,}84} \cdot 6000 = 5156 \text{ kilogr.}$$

et le moment de flexion au point où repose la traverse chargée

$$\mathfrak{M} = A \times 0{,}42 = 5156 \times 0{,}42 = 2165 \text{ kilogr.}$$

Nous choisirons dans la table XXIX, page 152, une poutre en I du poids de 42,6 kilogr. par mètre courant, qui, pour 25,1 cent. de hauteur, donne $\Sigma Xy = 2481$ kilogrammètres.

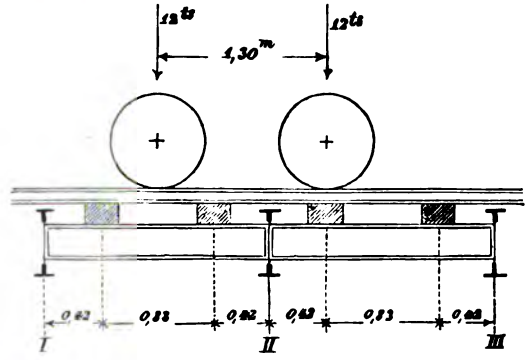
Remarque. Nous aurions aussi pu obtenir par interpolation, le moment de flexion à l'aide de la table XXX^a, à savoir:

$$\max \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 3587 + 1 \cdot 4500}{3} = 1945 \text{ kilogrammètres.}$$

Cette valeur est un peu plus faible que celle trouvée ci-dessus, parce que la table XXX^a est calculée pour une plus grande distance des traverses et des axes des roues motrices de la locomotive.

Nous devrons prendre, pour le *calcul des entretoises*, comme charge sur l'entretoise II de la fig. 124,

Fig. 124.



pour la locomotive

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) 12000 \text{ k.} = 15000 \text{ kilogr.}$$

1,67 m. tablier à 550 k. = 918 „

ensemble 15918 kilogr.

dont la moitié, en nombre rond 8000 kilogr., agit sur chacun des points chargés (voir fig. 120, page 173); d'après le 12ème cas de la table XXVIII, on a, pour l'exemple que nous avons choisi:

$$\max \mathfrak{M} = P\lambda = 8000 \cdot 10 \cdot 8000 \text{ kilogrammètres.}$$

Nous prendrons, pour l'entretoise, une paroi verticale de 50 cent. de hauteur et de 0,7 cent. d'épaisseur; deux cornières suffisent comme nervure; nous prendrons 45 cent. pour la distance $\mathfrak{H}_0$ des centres de gravité des nervures et l'on a, d'après la formule 150) en posant $\mathfrak{A} = 600$

$$\Omega = \frac{8000}{600 \cdot \frac{0{,}2025}{0{,}50}} - \frac{1}{6} \cdot 0{,}6 \cdot 45$$

$$\Omega = 32{,}9 - 4{,}5 = 28{,}4 \text{ cent. carrés}$$

de sorte que les deux cornières, chacune de 17 cent. carrés, suffisent et donnent à-peu-près 30 cent. de section résistante après déduction pour les logements des rivets, ensorte que la tension dans les fibres extérieures sera

$$600 \frac{28{,}4}{30} = 564 \text{ kilogr.}$$

112. Après avoir calculé chaque pièce de la poutre, nous voulons encore déterminer les poids de chacune des pièces et les récapituler dans une table.

(La table se trouve ci-après.)

Table XXXIII.

N°.	Désignation des parties du pont.	Détail. Décim. cubes.	Détail. kilogr.	poids par mètre courant du pont.
1	Nervures.			
	4 feuilles de tôle, chacune de 15,6 m. de longueur 22,0 c. de largeur 0,9 c. d'épaisseur	123,55	964	
	4 d°. chacune de 10,2 m. de longueur 22,0 c. de largeur 0,9 c. d'épaisseur	80,78	630	241
	4 d°. chacune de 7,2 m. de longueur 22,9 c. de largeur 0,9 c. d'épaisseur	57,02	435	
	8 cornières, chacune de 15,6 m. de longueur et de 18 cent. carrés de section	224,64	1752	
	16 couvre-joints des cornières, chacun de 88 c. de longueur et de 12 c. carrés de section	15,86	120	
	4 couvre-joints de feuilles de tôle de la nervure, chacun de 160 c. de longueur, 22,0 c. de largeur, 0,9 c. d'épaisseur	12,67	99	21
	Têtes de rivets (sans compter la partie cylindrique entre la paroi verticale et la nervure), 1940 têtes à 6,6 cent. cubes . . .	11,84	92	
	ensemble	. .	4092	262
2	Paroi verticale.			
	4 feuilles de tôle, chacune de 3,63 m. de longueur 145 c. de hauteur 0,7 c. d'épaisseur	147,4	1150	
	4 d°. chacune de 4,17 m. de longueur 145 c. de hauteur 0,6 c. d'épaisseur	149,1	1163	148
	12 couvre-joints, chacun de 1,25 m. de longueur 40 c. de largeur 0,5 c. d'épaisseur	30,0	234	
	16 fourrures, chacune de 1,25 m. de longueur 20 c. de largeur 1.0 c. d'épaisseur	40,0	312	
	4 d°. chacune de 1,25 m. de longueur 20 c. de largeur 0,5 c. d'épaisseur	5,0	39	86
	32 cornières des armatures verticales, chacune de 143 c. de longueur et de 14,0 c. carrés de section	64,1	500	
	4 armatures verticales, chacune de 143 c. de longueur et de 40 cent. carrés de section	22,9	179	
	1700 têtes de rivets, à 6 c. cubes	10,2	80	
	ensemble	. .	3657	234

Table XXXIII. (Continuation.)

N°.	Désignation des parties du pont.	Détail. Décim. cubes.	Détail. kilogr.	poids par mètre courant du pont.
3	**Contreventement.**			
	10 diagonales, chacune de 5,2 m. de longueur) 10 c. de largeur { 0,8 c. d'épaisseur)	41,6	325	
	120 têtes de rivets, à 6 cent. cub.	0,7	45	
	ensemble	. .	370	24
4	**Entretoises.**			
	10 tôles de la paroi verticale, chacune de 2,9 m. de longueur) 50 c. de hauteur { 0,7 c. d'épaisseur)	101,5	792	
	20 goussets, chacun de 143 c. de hauteur) en moyenne 23 c. de largeur { 0,7 c. d'épaisseur)	46,0	359	
	40 cornières, en moyenne chacune de 3,5 m. de longueur et de 17 c. carrés de section	238,0	1856	
	40 couvre-joints, chacun de 20 c. de longueur) 30 c. de hauteur { 0,5 c. d'épaisseur)	12,0	94	
	1800 têtes de rivets, à 6 c. cub.	10,8	84	
	ensemble	. .	3185	204
5	**Longrines-sous-rails.**			
	18 fers en T, chacun de $1^2/_3$ m. de longueur et d'un poids de 42 kilogr. par mètre courant	. .	1260,0 k	
	72 cornières d'attache, chacune de 21 c. de hauteur et de 40 c. carrés de section. .	62,0	484	
	20 tôles de renfort, chacune de 48 c. de hauteur) 30 c. de largeur { 1 c. d'épaisseur)	28,8	225	
	600 têtes de rivets à 6 c. cub.	3,6	27	
	ensemble	. .	1996	127
6	**Rails.**			
	15,6 mètres courants à 80 kilogr.	. .	1248	80
7	**Traverses.**			
	18 traverses, chacune de 2,5 m. de longueur, de $^{24}/_{16}$ cent. de section et pesant 67 kilogr.	. .	1206	77
8	**Madriers en chêne.**			
	2,0 m. de largeur, 7 cent. d'épaisseur, du poids de 105 kilogr. par mètre courant . . .			k 105

Les poids 1—8 doivent être répartis sur les poutres principales et sur le tablier d'après le N°. **66**, d'où résulte le résumé suivant:

Table XXXIV.

Nro.	Désignation des parties du pont.	Poids		Somme	
		en kilogr.	par mètre courant.	total.	par mètre courant.
	Poutre principale.				
1	Nervure	4092	262		
2	Paroi verticale	3657	234		
3	Contreventement	370	24		
				8119	520
	Tablier.				
4	Entretoises	3185	204		
5	Longrines-sous-rails	1996	127		
6	Rails	1248	80		
7	Traverses	1206	77		
8	Madriers	1638	105	9278	593
				17392	1113
	Poids total comprend:				
6—8	matériel de voie	4092	262		
1—5	la construction en fer forgé	13300	851		
	Somme, comme ci-dessus	17392	1113		

Nous avons pris dans le calcul 1075 au lieu de 1113 kilogr. pour propre poids du pont, ce qui ne produirait qu'une très-petite différence de tension. On aurait, pour ce cas, à placer dans l'équation 103[a])

$$C = 33{,}3 \qquad F = 593$$

donc

$$p = 33{,}3\ l + 593 = 1113 \text{ kilogr.}$$

113. Nous calculerons encore, pour le pont ci-dessus, l'effort maximum de tension oblique dans la paroi verticale.

Les fig. a et b de la planche VI représentent graphiquement, pour la poutre principale, les valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$, tant pour la charge totale que pour la charge partielle; elles sont fondées sur la table XXXII (ainsi que nous l'avons déjà montré dans les fig. 117 et 118 du N°. **108**) et pour deux sections où la coupe réelle se rapproche le plus de la coupe théorique, nous avons déterminé l'effort de la plus grande tension longitudinale $\mathfrak{A}_0$ et l'effort rasant $\mathfrak{S}_0$ dans la fibre neutre d'après la fig. b, qui représente les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{B}$ pour le cas d'une surcharge partielle. C'est avec ces valeurs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$, que nous avons construit

les fig. 2 et 3 de la planche I, en employant le procédé indiqué dans le N°. **27**, et l'on voit d'après ces figures que, pour les sections considérées, $\mathfrak{D}_{max}$ n'atteint jamais la valeur de l'effort longitudinal $\mathfrak{A}_0$ dans les fibres extérieures.

Pour les entretoises, nous avons pris chaque max $\mathfrak{B}$ égal à 8000 kilogr. à partir des points chargés jusqu'aux points d'attache, et $\delta = 0{,}6$ cent. vu l'affaiblissement produit par les rivets; $\mathfrak{H}$ se détermine, pour les entretoises, d'après la formule 32) et les dimensions de coupes ci-dessus indiquées

$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^a z\,dy} = \frac{38383}{897{,}7} = 42{,}8 \text{ cent.}$$

et pour l'effort rasant dans la fibre neutre, d'après l'équation 144)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{8000}{0{.}6 \times 42{,}8} = 311 \text{ kilogr.}$$

Cet effort rasant descend jusqu'à 276 kilogr. au bord intérieur de la cornière de la nervure, tandis que l'effort de tension longitudinale en ce point est $\frac{17}{28} . 600 = 408$ kilogr.; nous obtiendrons donc d'après l'équation 55)

$$\max \mathfrak{D} = \frac{408}{2} \pm \sqrt{276^2 + 204^2} = 547 \text{ kilogr.}$$

Pour les *longrines-sous-rails*, nous avons max $\mathfrak{B} = {}^3/_4\ 6000 = 4500$ kilogr. d'où résulte, vu la forme de la poutre représentée dans la planche VI, d'après l'équation 45) et les développements suivants, pour l'effort rasant dans la fibre neutre

$$\mathfrak{S}_0 = 214 \text{ kilogr.}$$

et pour l'effort rasant au bord intérieur de la nervure

$$\mathfrak{S} = 153 \text{ kilogr.}$$

Prenant enfin pour l'effort de tension longitudinale au bord intérieur de la nervure $600 \frac{21{,}2}{24} = 530$ kilogr., nous obtiendrons pour cette dernière section horizontale, d'après l'équation 55):

$$\mathfrak{D}_{max} = 265 \pm \sqrt{153^2 + 265^2} = 571 \text{ kilogr.}$$

§ 14.

Pont de chemin de fer près de Langon.

114. Le pont de Langon est établi sur la Garonne, pour le chemin de fer de Bordeaux à Cette et a été livré à la circulation en 1857; c'était la première fois que d'habiles ingénieurs français faisaient usage sur une grande échelle des expériences faites au pont de Britannia, et si l'influence du grand pont anglais ne peut être niée, il y a néanmoins ici progrès et conception nouvelle.

La planche VII indique les données principales et les détails de ce pont décrits dans l'ouvrage „Construction des ponts métalliques par MM. L. Molinos et C. Pronnier, Paris 1857", auquel nous empruntons nos chiffres.

Dans le calcul du pont, la longueur de la travée du milieu a été prise de 74,4 mètres, ensorte que la largeur d'appui est de 3 mètres sur les piles intermédiaires (correspondant à la surface réelle de contact) et de 1,57 mètre sur les culées; la longueur totale des poutres est de 211,7 mètres.

Le propre poids du pont a été pris de 1900 kilogr. par mètre courant de voie, et la surcharge de 4000 kilogr.; le pont est à deux voies, composé seulement de deux poutres en garde-corps, ensorte que chacune d'elle doit porter une voie.

Les poutres sont *continues* sur 3 arches; le procédé de M. Clapeyron, indiqué dans les N^os^. **21** et **22**, a été employé pour déterminer la ligne élastique, les moments de flexion $\mathfrak{M}$ et les pressions sur les appuis.

On a fait l'hypothèse que chacune des travées était alternativement chargée; les résultats principaux sont consignés dans la table XXXV.

115. La table XXXV permet de déterminer tous les $\mathfrak{M}$ et tous les $\mathfrak{B}$ d'après les équations 108)—109), ainsi que nous l'avons indiqué dans le N^o^. **78.** C'est d'après ces calculs qu'il a été fait une représentation graphique des $\mathfrak{M}$ (moments de flexion) et des $\mathfrak{B}$ (efforts tranchants) pour les 4 hypothèses.

En portant simultanément les diverses courbes, on obtient pour chacune des valeurs de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{M}$, une courbe enveloppante qui contient les valeurs maxima absolues des efforts tranchants et des moments de flexion.

Les dimensions des nervures et de la paroi verticale ont été déterminées, pour chaque coupe, d'après les valeurs maxima indiquées des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$.

Nommons

H la hauteur totale de la construction,
$\mathfrak{H}_0$ la distance des centres de gravité des nervures (en même temps hauteur de la paroi verticale = 550 cent.),
δ l'épaisseur de la paroi verticale,
Ω la section des nervures,
$\mathfrak{A}$ la tension des fibres extérieures,
Θ le moment d'inertie de la section,
$\mathfrak{C}$ l'effort rasant contre le cisaillement.

Table XXXV.

$p = 1900$ kilogr. $\quad a = 64{,}05$ m.
$k = 4000$ kilogr. $\quad b = 74{,}4$ m.

Hypothèse sur la charge		1. appui A.	1. travée.	2. appui B.	2. travée.	3. appui C.	3. travée.	4. appui D.
charge de la travée AB	moment de flexion max $\mathfrak{M}$	0	2137,5 tm	1936,5 tm	1079,8 tm	637,3 tm	682,6 tm	0
	pression sur l'appui	158,8 t	—	307,4 t	—	124,0 t	—	—
charge de la travée BC	moment de flexion max $\mathfrak{M}$	0	211,4	2084,6	1997,7	2084,6	211,4	—
	pression sur l'appui	28,3	—	312,9	—	312,9	—	28,3
charge des travées AB et BC	moment de flexion max $\mathfrak{M}$	0	1673,5	3108,6	1649,2	1809,5	280,3	—
	pression sur l'appui	140,5	—	474,5	—	291,1	—	—
charge complète des 3 travées	moment de flexion max $\mathfrak{M}$	—	1777,3	2833,5	1248,9	2833,5	1777,3	—
	pression sur l'appui	144,8	—	452,7	—	452,7	—	144,8

Pour le *calcul de la paroi verticale*, on a supposé qu'une section verticale $\delta\mathfrak{H}_0$ ait à supporter la force $\mathfrak{B}$, ensorte qu'on a obtenu la tension verticale de la paroi $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{\delta\mathfrak{H}_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

D'après les N°. **24—28**, nous savons que l'effort rasant vertical ne se répartit pas d'une manière uniforme sur toute la section, la planche I et spécialement la planche VII, montrent que l'effort rasant vertical diminue vers les nervures; d'après l'équation 144), l'effort rasant dans la fibre neutre est

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V}}{\delta \mathfrak{H}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Ces deux équations I. et II. ne diffèrent entre elles que des valeurs $\mathfrak{H}_0$ et $\mathfrak{H}$; cette dernière se trouve d'après l'équation 148) sur les appuis $= 0{,}93\ \mathfrak{H}_0$. — On a pris dans le calcul 360 kilogr. par centimètre carré comme effort rasant maximum (en négligeant l'affaiblissement produit par les rivets), et l'épaisseur de la paroi verticale a été calculée, pour chaque abscisse, d'après l'équation I. Près des piles, on a porté cette épaisseur à 12 millimètres, et comme épaisseur minimum il a été pris 7 millimètres à-peu-près sur la moitié de la longueur; on a regardé cette épaisseur comme minimum, afin d'éviter les risques de voilements et à cause des influences hygrométriques.

La section à donner aux nervures a été déterminée, d'après Molinos et Pronnier, par l'emploi de la formule approximative suivante:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \left\{ \mathfrak{H}_0 \Omega + \frac{1}{6} \delta \mathfrak{H}_0^{\,2} \right\} \quad \ldots \ldots \quad 165)$$

dans laquelle les lettres conservent leur signification précédente.

Dans le but d'obtenir une tension uniforme $\mathfrak{A}$ d'environ 600 kilogr., on a composé la section des nervures aux extrémités: de 6 cornières, ayant ensemble 129,6 cent. carrés, de 2 tôles verticales de 74,8 cent. carrés de surface, d'un fer plat horizontal de 90 cent. de largeur et de 108 cent. carrés, formant une section totale de 312,4 cent. carrés; sur les piles, cette section a été renforcée par l'addition de 5 tables horizontales, 3 d'entre elles de 90 cent. de largeur et de 12 millimètres d'épaisseur, les deux autres de 9 cent. de largeur et de 10 millimètres d'épaisseur; la section totale sur les piles est donc de $312{,}4 + 342 = 654{,}4$ cent. carrés; il n'a pas été fait de déduction pour les logements des rivets.

Au milieu du pont, la section des nervures est de 528,4 cent. carrés; le moment fléchissant maximum est d'après la table XXXV

$$\max \mathfrak{M} = 1997{,}7 \text{ mètres tonnes}$$

d'où résulte d'après l'équation ci-dessus:

$$\mathfrak{A} = \frac{199700}{5{,}50 \,.\, 528{,}4 + \frac{1}{6} 5{,}5 \,(0{,}7 \,.\, 550)} = 613 \text{ kilogr.}$$

Notre formule 158), d'une exactitude mathématique pour des sections symétriques, donne par l'emploi du rapport $\frac{\mathfrak{P}_0}{H} = \frac{550}{557}$ la valeur $\mathfrak{A} = 620{,}8$; dans le cas qui nous occupe, l'équation 165) présente une faute d'un peu plus de 1 pour cent.

Si l'on emploie la formule 165) pour la section sur les piles, en prenant max $\mathfrak{M}$ dans la table XXXV, et en introduisant la section ci-dessus calculée de 654,4 cent. carrés, on obtient une tension maximum de 739 kilogr.; nous ne connaissons pas la raison pour laquelle on a adopté une tension si grande, qui est aussi indiquée dans la représentation graphique donnée par MM. Molinos et Pronnier.

116. Dans le N°. **28**, nous avons déjà calculé la tension oblique dans la paroi verticale de ce pont, en supposant que la tension longitudinale maximum soit de 600 kilogr. dans les fibres extérieures et l'effort rasant dans la phase neutre de 350 kilogr.; la fig. 4 de la planche VII représente graphiquement le résultat de ce calcul; nous y voyons que, pour les coupes où agissent ces efforts (600 et 350), la tension oblique maximum dans la paroi verticale est égale à 687 kilogr.; sur les piles intermédiaires (où $\mathfrak{A}$ est égal à 739 kilogr.), cette tension doit être notablement plus forte et dépasser 800 kilogr. par cent. carré.

117. D'après les données de MM. Molinos et Pronnier, le poids de la construction métallique du pont de Langon est de:

Poutres principales	726	tonnes
Contreventement et divers	49	„
	775	tonnes
Entretoises, longrines-sous-rails, Croix de St. André	188	„
total	993	tonnes

donc par mètre courant de voie 2274 kilogr. et en y ajoutant le poids des rails, traverses, madriers et couche de ballast, environ 2900 kilogr., l'équation 103) s'écrit dans ce cas:

Poids de la construction métallique

$$p' = 445 + 271 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

et comme poids total

$$p = 1085 + 271 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

L'équation I. montre pour le pont de Langon, une grande légèreté de construction, surtout si l'on a égard à l'époque où il a été construit; cette légèreté est due à la continuité des poutres principales, à l'arrangement du tablier et surtout à ce qu'il n'a été construit que deux poutres principales pour les deux voies.

La continuité a produit une épargne de 20% en poids des nervures; on a épargné encore davantage en paroi verticale en n'employant que deux poutres, car, comme l'épaisseur de la paroi verticale sur la plus grande partie du pont ne peut être réduite que fort peu, lors de l'emploi d'un plus grand nombre de poutres principales, et que les constructions de rigidité, quoique un peu plus faibles, devraient être appliquées à chacune des poutres, il en résulterait que l'emploi de 4 poutres formerait au moins un poids de moitié plus grand que les deux poutres du pont de Langon, donc il a été épargné au moins 30% de poids en parois verticales.

Fig. 123.

118. Les *parois verticales des poutres principales* consistent en feuilles de tôle de 86 cent. de largeur et de 5,5 millimètres de hauteur, les joints des tôles verticales sont faits au moyen de fers à ⊤ ainsi que le représente la fig. 123. La distance verticale des rivets de 18 millimètres de diamètre est de 10 cent.; l'effort rasant dans la fibre neutre $\mathfrak{S}_0$ calculé de 360 kilogr. abstraction faite des rivets est, après déduction des logements de ces derniers,

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{100}{82} \cdot 360 = 439 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

L'effort rasant des rivets $\mathfrak{E}$ est, d'après l'équation 162):

$$\mathfrak{E} = 360 \frac{8{,}2}{2 \cdot 2{,}54} = 585 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Les résultats des équations I. et II. correspondent assez bien avec nos règles; la distance des rivets, par conséquent leur tension, est relativement moindre que dans l'exemple du § 13, ce qui est nécessaire, puisque les nervures représentées par la fig. 123 n'offrent qu'une seule rangée de rivets qui supportent une tension beaucoup plus grande près des nervures. — Lorsque, par exemple, la tension longitudinale au bord de la nervure est de 600 kilogr. et que l'effort rasant de la paroi verticale est à cet endroit de 300 kilogr. pour une section donnée, la tension oblique maximum dans la paroi verticale est, d'après la table VI, de 724,2 kilogr., tandis que le diamètre et le nombre des rivets restent les mêmes que sur l'axe neutre, où la tension (pression) maximum est de 439 kilogr.

Près de la pile intermédiaire, où la tension longitudinale s'élève jusqu'à 739 kilogr., les rivets de la paroi verticale supportent un effort très-considérable; à ces endroits, il a été employé des *armatures* (voir fig. 124) munies d'une double rangée de rivets. Ces derniers sont ainsi notablement soulagés.

A l'endroit où les entretoises rencontrent les armatures indiquées par les fig. 123 et 124, le fer en ⊤ est remplacé par deux cornières avec couvre-joints, comme le représente la fig. 125.

Fig. 124.

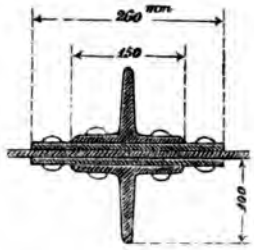
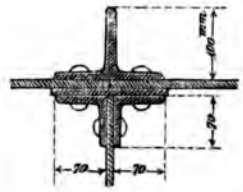
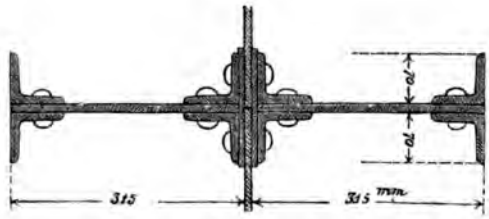


Fig. 125.



Cette dernière disposition n'a été employée que pour la moitié des entretoises, parce qu'à tous les 5,16 mètres de distance, il a été employé des *armatures verticales plus fortes*, qui servaient en même temps de points d'attache des autres entretoises; la section en est représentée par la fig. 126.

Fig. 126.



Ces armatures verticales renforcées ont aussi été employées aux *extrémités* des poutres et forment, par l'addition de croix de St. André, un système très-rigide.

La répartition des armatures des parois verticales représentées par les fig. 123—126, est indiquée dans la planche VII. On voit qu'il a été construit sur les piles du milieu 3 armatures semblables qui ont à répartir, avec la paroi verticale comprise entre elles, la pression totale sur la pile entière. La pression maximum sur la pile, d'après la table XXXV, lorsque 2 travées sont chargées, est de 474,4 tonnes; la section de la paroi verticale est de 360 cent. carrés (sans déduction des rivets) et est augmentée jusqu'à environ 900 cent. par l'emploi des armatures verticales, ensorte que la pression moyenne est d'environ

$\frac{474500}{900} = 527$ kilogr. Il s'en suit évidemment que la pression doit être répartie sur toute la surface de la pile si l'on veut que quelques parties ne subissent pas des efforts démesurés (voir le N°. **86**).

119. La planche VII indique l'arrangement employé pour les nervures; il faut encore remarquer qu'il a été employé des deux côtés des couvre-joints qui ont reçu un nombre suffisant de rivets placés les uns à la suite des autres, de façon que la répartition uniforme des rivets a pu être maintenue sur toute la longueur, ce qui est avantageux, vu la simplicité qui en résulte dans l'exécution. Toutes les tôles horizontales des nervures ont la même longueur de 5,16 mètres, égale à la distance double des entretoises.

Les dimensions des rivets qui *relient les nervures avec la paroi verticale* ont été déduites de la valeur $\frac{d\mathfrak{M}}{dx}$ et l'effort tranchant pour ces rivets a été pris de 500 kilogr. par cent. carré; nous savons d'après l'équation 18), que $\frac{d\mathfrak{M}}{dx}$ est égal à l'effort tranchant $\mathfrak{V}$ dont la valeur maximum pour une poutre selon la table XXXV et l'équation 106) $= 64{,}08 \,.\, q - A = 64{,}0 \,.\, 5{,}9 - 140{,}5 = 237{,}5$ tonnes.

La distance D, des rivets de 2,5 cent. de diamètre, placés entre la paroi verticale et la nervure est, d'après l'équation 162):

$$D_1 = \frac{5}{4} \,.\, 2\mathfrak{C} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} \,.\, \frac{d^2\pi}{4}.$$

$$D_1 = \frac{5}{4}\, 2 \,.\, 500 \,\frac{511{,}5}{237500} \,.\, 4{,}9 = 13{,}2 \text{ cent.}$$

et dans l'exécution cette distance a été portée à 10,7 cent. —

120. La *construction des rivets* exerce la plus grande influence sur la solidité des ponts à parois en tôle ainsi que sur le prix du montage. Le soin réclamé pour ces rivets a été observé pour le pont de Langon, tant dans l'exécution, que dans la description que MM. Molinos et Pronnier en ont donnée.

Les rivets ont reçu un diamètre de 1 millimètre plus faible que les trous qu'ils ont à remplir, ensorte que le refoulement procuré par la rivure à chaud fait exactement remplir le trou et que le contact existe encore après le refroidissement comme on peut s'en convaincre en faisant sauter une tête; nous avons déjà fait remarquer que ce remplissage du trou n'est assuré que lorsque la longueur du rivet n'est pas trop grande relativement à son dia-

mètre. La partie cylindrique des rivets doit être un peu plus grande que celle des tôles à réunir; pour la construction des têtes, il faut encore ajouter une longueur égale à 1,1 fois le diamètre du rivet. MM. Molinos et Pronnier ont donné la table suivante, où la longueur des rivets a été déterminée comme nous l'avons indiqué ci-dessus et d'après les recherches faites dans les usines de MM. Gouin et Comp.

Table XXXVI.

Epaisseur à river.	Rivets de 18 millim. de diamètre; poids de 100 têtes = 4,28 kilogr.		Rivets de 20 millim. de diamètre; poids de 100 têtes = 5,87 kilogr.		Rivets de 22 millim. de diamètre; poids de 100 têtes = 7,76 kilogr.		Rivets de 25 millim. de diamètre; poids de 100 têtes = 11,39 kilogr.	
	Longueur de la partie cylindr.	Poids de 100 rivets.	Longueur de la partie cylindr.	Poids de 100 rivets.	Longueur de la partie cylindr.	Poids de 100 rivets.	Longueur de la partie cylindr.	Poids de 100 rivets.
15	42	12,04 k	45	16,14	45	20,50	51	29,28
18	45	12,64	48	16,87	48	21,39	54	30,16
21	48	13,23	51	17,60	51	22,28	57	31,31
24	51	13,82	54	18,34	54	23,17	60	32,46
27	54	14,42	57	19,07	57	24,06	63	33,61
30	57	15,01	60	19,80	60	24,94	66	34,76
33	60	15,61	63	20,54	63	25,83	69	35,91
36	63	16,19	66	21,27	66	26,72	72	37,05
39	66	16,77	69	22,00	69	27,61	75	38,20
42	72	17,94	72	22,74	72	28,49	78	39,35
45	75	18,53	75	23,47	75	29,38	81	40,50
48	78	19,11	78	24,20	81	30,27	87	42,79
51	81	19,61	81	24,44	84	31,16	90	43,94
54	84	20,28	84	25,67	87	32,05	93	45,09
57	87	20,86	87	26,40	90	32,94	96	46,23
60	90	21,45	90	27,13	93	33,82	99	47,38

121. Nous terminons la description de ce pont en donnant un résumé du poids des diverses pièces de la construction, tiré des données de MM. Molinos et Pronnier.

Table XXXVII.

Désignation des parties.	Poids par mètre courant pour une voie	
	séparément. en kilogr.	total.
a) Construction des poutres principales.		
1) *Paroi verticale.*		
Feuilles de tôle	350,3	
Armatures verticales	396,3	
Têtes de rivets	30,0	776,6
2) *Nervures.*		
Tables et cornières	829	
Couvre-joints	78	
Têtes de rivets	32	939,0
3) *Contreventement et divers.*		113,4
	total	1829,0
b) Entretoises, longrines-sous-rails, croix de St. André.		445,0
poids total du fer		2274,0
pour rails, traverses et madriers		441,0
pour couche de ballast		215,0
poids total de la construction par mètre courant de voie		2900,0

APPENDICE.

Rapports des poids et des mesures de divers pays.

Table XXXVIII.

Mesures de longueur.

Pied anglais.	Pied prussien.	Pied autrichien	Pied suisse.	Pied de Paris.	Mètre.
de 12 pouces.	de 12 pouces.	de 12 pouces.	de 10 pouces.	de 12 pouces.	de 100 cent.
1	0,9711	0,9642	1,0160	0,9383	0,3048
1,0297	1	0,9929	1,0462	0,9662	0,3138
1,0371	1,0072	1	1,0537	0,9731	0,3161
0,9843	0,9559	0,9490	1	0,9235	0,3000
1,0658	1,0350	1,0276	1,0828	1	0,3248
3,2809	3,1862	3,1634	3,3333	3,0784	1

Etats-Unis d'Amérique, comme l'Angleterre,
Russie, comme l'Angleterre,
Italie, Hollande, Belgique, comme la France,
Prusse — pied du Rhin;

Table XXXIX.

Poids.

Livre anglaise.	Livre douanière.	Kilogramme.
$= \frac{1}{2240}$ tonne.	$= \frac{1}{100}$ quintaux.	$= \frac{1}{1000}$ tonne.
1	0,9072	0,4536
1,1023	1	0,5000
2,2046	2,0000	1

Etats-Unis d'Amérique, comme l'Angleterre,
Italie, Suisse, Belgique, Hollande, comme la France,

1 libre ancienne d'Autriche = 0,560 kilogr.
1 „ „ de Prusse = 0,4677 „
1 „ „ de France = 0,4896 „

Table XL.

Mesures de superficie.

Pied carré anglais.	Pied carré prussien.	Pied carré autrichien.	Pied carré suisse.	Pied carré parisien.	Mètre carré.
1	0,9431	0,9297	1,0822	0,8804	0,0929
1,0603	1	0,9858	1,0945	0,9335	0,0985
1,0756	1,0144	1	1,1103	0,9470	0,0999
0,9688	0,9137	0,9007	1	0,8529	0,0900
1,1359	1,0712	1,0560	1,1724	1	0,1055
10,7643	10,1519	10,0074	11,1111	9,4768	1

Table XLI.

Mesures cubiques.

Pied cube anglais.	Pied cube prussien.	Pied cube autrichien.	Pied cube suisse.	Pied cube parisien.	Mètre cube.
1	0,9159	0,8964	1,0487	0,8261	0,0283
1,0918	1	0,9787	1,1450	0,9019	0,0309
1,1156	1,0217	1	1,1699	0,9215	0,0316
0,9535	0,8733	0,8548	1	0,7877	0,0270
1,2106	1,1087	1,0851	1,2695	1	0,0343
35,3166	32,3459	31,6578	37,0370	29,1738	1

Table XLII.

Poids par unité carrée de divers pays.

(La libre douanière est prise comme base pour l'Allemagne et l'Autriche.)

Anglais.	Prussien.	Autrichien.	Suisse.	Français.
Tonne par pouce carré.	Livre par pouce carré.	Livre par pouce carré.	Livre par pouce carré.	Kilogramme par centim. carré.
1	2154,6	2185,8	2834,9	157,49
0,000464	1	1,014	1,316	0,0731
0,000457	0,986	1	1,297	0,0720
0,000353	0,760	0,771	1	0,0555
0,006342	13,681	13,879	18,000	1

Remarque. Dans les calculs de ponts, on trouve encore les anciens poids prussiens et autrichiens.

1 kilogr. par c. carré = 14,62 livres ancien. pruss. par pouce carré
1 „ „ „ „ = 12,39 „ „ autrich. „ „ „
1 livre anc. autrich. par pouce carré = 0,0684 kilogr. par cent. carré
1 „ „ pruss. „ „ „ = 0,0807 „ „ „ „

Table XLIII.

Poids par unité linéaire de divers pays.

(La livre douanière est prise comme base pour l'Allemagne et l'Autriche.)

Anglaise.	Prussienne.	Autrichienne.	Suisse.	Française.
Tonne par pied courant.	Livre par pied courant.	Livre par pied courant.	Livre par pied courant.	Kilogrammes par mètre courant.
1	2092,5	2107,6	2000,2	3333,6
0,00048	1	1,0072	0,956	1,593
0,00047	0,993	1	0,949	1,582
0,0005	1,046	1,054	1	1,667
0,0003	0,628	0,632	0,6	1

1 livre ancienne de Prusse par pied cour. = 1,490 kilogr. par m. cour.
1 „ „ d'Autriche „ „ „ = 1,772 „ „ „ „
1 kilogr. par m. cour. = 0,671 livre ancienne de Prusse par pied cour.
1 „ „ „ „ = 0,564 „ „ d'Autriche „ „ „

Dans le calcul des poids, on peut réduire toutes les mesures cubiques en décimètres cubes d'après la table XLI.

Un décimètre cube d'eau pèse 1 kilogr., ensorte qu'on peut réduire les kilogrammes obtenus, en fonction des autres unités de poids, d'après la table XXXIX.

Le poids d'un volume d'eau étant pris comme unité, on obtient le poids réel du corps qu'on considère à l'aide de la table suivante.

Table XLIV.

Poids spécifiques de divers corps.

Eau	1,0
Sapin	0,47—0,55
Sapin fraîchement abattu, jusqu'à	0,9
Chêne	0,65—0,80
Fonte	7,2
Fer forgé	7,8
Acier fondu	7,9

Les données suivantes faciliteront encore davantage le calcul des poids:

1 décimètre cube	d'eau pèse	1	k.	= 1,000	k.			
1 pouce cub. d'Anglet.	„	„	0,0162	„	= 0,0357	livre	anglaise	
1 „ „ de Prusse	„	„	0,01788	„	= 0,03576	„	douan.	
1 „ „ d'Autriche	„	„	0,01829	„	= 0,03657	„	„	
1 „ „ de Suisse	„	„	0,027	„	= 0,0540	„	„	

Nota. Le second tome, contenant principalement le calcul et des exemples de ponts en treillis de diverses formes, est sous presse et paraîtra prochainement.

CALCUL ET CONSTRUCTION

DES

PONTS MÉTALLIQUES

PAR

MM. FR. LAISSLE ET AD. SCHUEBLER,
INGÉNIEURS.

Traduit de l'allemand
avec l'approbation des auteurs.

Tome deuxième.

STUTTGART.
PAUL NEFF, ÉDITEUR.
1871.

CALCUL ET CONSTRUCTION

DES

PONTS MÉTALLIQUES

PAR

MM. FR. LAISSLE et AD. SCHUEBLER,

INGÉNIEURS.

Traduit de l'allemand
avec l'approbation des auteurs.

Tome deuxième.

STUTTGART.

PAUL NEFF, ÉDITEUR.

1871.

Imprimerie de Woerner et Comp. à Stuttgart.

TABLE DES MATIERES.

Chapitre cinquième.

Formules pratiques pour les ponts-poutres en treillis.

§. 15. Théorie des poutres en treillis.

page

122—123. Désignation des diverses parties d'un treillis 201
124—128. Formules générales pour la détermination des moments de flexion $\mathfrak{M}_m$ et des efforts tranchants $\mathfrak{V}_m$ qui agissent dans le treillis 203
129—130. Modifications de la surcharge uniformément répartie . . . 211
131—132. Treillis simples symétriques 214
134—135. Treillis simples non-symétriques 219
136—137. Barres et contre-fiches 224
138. Treillis doubles 226
139—141. Treillis multiples symétriques et non-symétriques 227
142. 143. Treillis combinés 231

§. 16. Poutres en treillis, à nervures droites et horizontales.

144. Généralités sur les poutres en treillis rectilignes 233
145. Treillis simples symétriques, à nervures rectilignes et horizontales 236
146—148. Poutres en treillis du viaduc de Crumlin 236

page
149. Pont sur le Trent à Newark 244
150. 151. Treillis simples, non-symétriques, à nervures rectilignes et horizontales 245
152.—154. Pont sur l'Isar, à Munich 250
155. Treillis doubles, symétriques, à nervures horizontales 258
156—57. Pont sur la Brenz, à Königsbronn 259
158. Treillis multiples, non-symétriques, à nervures horizontales . . . 264
159. 160. Pont sur le Danube à Ingolstadt 266

§. 17. Poutres paraboliques.

161—162. Propriétés générales des poutres paraboliques et détermination des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ pour le plus grand effort dans les barres 275
163. Système ordinaire, simple, non-symétrique, des poutres paraboliques 279
164. 165. Pont sur la Brahe à Czerak 283
166. Projet pour le pont sur l'Elbe à Meissen 284
167. Pont Royal-Albert à Saltash 285

§. 18. Poutres cintrées, non-paraboliques.

168. Généralités sur les poutres cintrées non-paraboliques 287
169—171. Poutres en treillis du système de Mr. Pauli 288
172. 173. Pont sur le Main à Kitzingen 292
174. Pont sur le Rhin à Mayence 297
175—178. Poutres en treillis du système de Mr. Schwedler 301
179—181. Pont de chemin de fer sur le Colomak 308
182. 184. Pont sur l'Elbe à Tangermuende 321
185. Pont sur l'Elbe à Meissen 329
186. Pont sur le Leck à Kuilenburg 330

Chapitre sixième.

Ponts à poutres lattices.

§. 19. Théorie des ponts lattices.

187. Généralités sur les parois lattices 332
188. Formules pour les poutres lattices sans armatures verticales . . 334
189. Formules pour les poutres lattices avec armatures verticales . . 336
190. Classification des poutres lattices 339

§. 20. Ponts à poutres lattices, à barres semblables dans les deux sens, sans barres verticales.

page
191. Considérations générales 340
192. 193. Pont sur l'Eipel à Szobb 342
194. Poutres lattices à mailles variables 345
195. Pont sur la Blau à Ehrenstein 345

§. 21. Ponts à poutres lattices, à barres en fers plats et à barres verticales.

196. 197. Considérations générales 350
198. 199. Pont sur la Vistule à Dirschau 352
200—202. Pont sur le Rhin à Cologne 355

§. 22. Ponts à poutres lattices, à barres rigides et à tiges en fers plats.

203. Considérations générales et formules 357
204. 205. Pont sur le Boyne à Drogheda 359
206. Pont sur la Sarine à Fribourg 362

Chapitre septième.

Supplément et résumé.

§. 23. Ponts-tubes.

207. Généralité sur les ponts-tubes 364
208. 209. Pont de Britannia, sur le détroit de Menai 365
210. Autres ponts-tubes 368

§. 24. Ponts à poutres composées.

211—212. Généralités sur les poutres armées 368
213. Pont de Chepstow 369

§. 25. Poutres continues sur plusieurs ouvertures.

214. Tables pour des poutres continues sur 4 et 5 ouvertures de même portée 371

§. 26. Considérations rétrospectives.

page
215. Exemples d'emploi des formules données 376
216. Comparaison des poids métalliques de ponts construits rationnellement 377

Appendice.

Table des fonctions trigonométriques 383
Récapitulation de quelques notations employées pour les treillis 391
Errata 392

CHAPITRE CINQUIÈME.

Formules pratiques pour les ponts-poutres en treillis.

§ 15.

Théorie des poutres en treillis.

122. Le trait caractéristique des poutres en treillis consiste en ce que leurs nervures sont reliées entre elles par des *barres*, (arcs-boutants, tirants, liens), de façon à former un système fixe de triangles invariables. Une des conditions essentielles à remplir, c'est de tâcher que chacune des pièces du treillis ne soit soumise qu'à des efforts longitudinaux, pression ou tension et si possible pas du tout à la flexion. — Si l'on nomme

- O la force dans la partie considérée de la nervure supérieure,
- U la force dans la nervure inférieure,
- Ω la section transversale de la nervure,
- N la force dans une barre,
- ω la section transversale de cette barre,
- $\mathfrak{A}$ la tension par unité carrée dans une pièce soumise à la traction,
- $\mathfrak{B}_m$ la pression moyenne dans une pièce soumise à la compression,

d'après les lois développées dans l'étude des corps prismatiques, et spécialement d'après l'équation 20), on a:

pour la nervure supérieure:

$$\mathfrak{A} \text{ ou } \mathfrak{B}_m = \frac{O}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166)$$

pour la nervure inférieure:

$$\mathfrak{A} \text{ ou } \mathfrak{B}_m = \frac{U}{\Omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 167)$$

pour une barre:

$$\mathfrak{A} \text{ ou } \mathfrak{B}_m = \frac{N}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 178)$$

Lorsque des barres iront dans plusieurs directions, nous nommerons:

V la force dans une barre verticale (arc-boutant, tirant, boulon),
T la force dans une barre de direction opposée à celle de la force N,

l'équation 168) s'écrira

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} \text{ ou } \mathfrak{B}_m &= \frac{T}{\omega} \\ \mathfrak{A} \text{ ou } \mathfrak{B}_m &= \frac{V}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

Pour des prismes courts la pression moyenne $\mathfrak{B}_m$ doit être prise égale à la pression maximum $\mathfrak{B}$ qui agit dans la barre; pour des prismes longs, cette pression se trouvera d'après la méthode indiquée dans le § 3; l'équation 76) fournit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad \ldots\ldots \quad 169)$$

où L indique la longueur libre de la pièce considérée (voir le N°. **37**), Θ le moment d'inertie de la section dans le sens du ploiement probable et le terme $\left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right)$ indique de combien la résistance de pièces d'une longueur plus grande est moindre que celle de pièces courtes; les coefficients K sont contenus dans la table XI, et la série des valeurs de $\mathfrak{B}_m$ à adopter, dans la table XIV.

123. Les poutres en treillis étant composées de triangles, il en résulte qu'en général au moins deux barres viennent s'assembler sur les nervures, ensorte que les extrémités de ces barres forment les *articulations* du treillis.

Les diverses pièces d'un treillis ne devant être soumises qu'à des efforts longitudinaux, il en résulte à la rigueur, que *la charge d'une poutre en treillis ne devrait être appliquée qu'aux articulations.* En général, cette condition est remplie au moyen de *poutrelles* et d'*entretoises*; ces dernières servent ordinairement de points d'appui aux poutrelles et sont assujetties aux articulations supérieures ou inférieures, ou bien aussi à des armatures verticales (barres ou montants verticaux).

Lorsque la charge se trouve entre deux articulations consécutives, les nervures sont soumises à des efforts résultant de la flexion, qu'on devra ajouter aux efforts de tension ou de compression produits par le système du treillis lui-même; dans la détermination de ces efforts accessoires, on suppose la charge de la nervure transmise sur les articulations et déterminée d'après la loi du levier (suivant les cas, en tenant compte de la continuité). Le propre poids des pièces de construction agit semblablement à celui d'une charge qui se trouve entre les articulations; — le poids propre du pont est généralement regardé comme réparti uniformément par unité de longueur, ensorte que dans le cas d'équidistance des articulations, on pourra admettre, en général, que chacune d'elles est également chargée par le poids propre de la poutre principale, tandis que le tablier est uniformément réparti sur les articulations supérieures ou sur les articulations inférieures ou sur toutes deux à la fois.

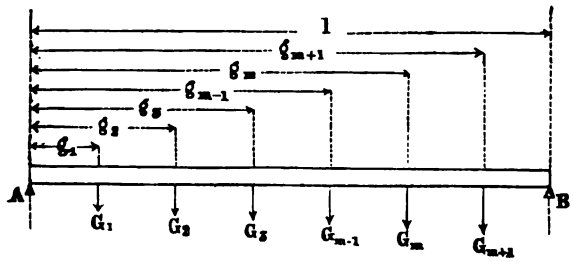
124. Dans un fragment de poutre limité par une coupe verticale x, nommons, comme nous l'avons fait dans le N°. **4**,

$\mathfrak{V}$ *l'effort tranchant*, c'est-à-dire la somme algébrique des composantes verticales agissant à l'extérieur sur ce fragment (en valeur numérique égale à la résistance verticale ΣY de la section x);

$\mathfrak{M}$ *le moment de flexion*, c'est-à-dire le moment des forces extérieures, qui, en valeur numérique, est égal au moment de résistance ΣXy des forces intérieures agissant en un point quelconque de la section considérée x. —

La détermination des valeurs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{V}$ se fera au moyen des équations 100)—102), puisque les charges sont concentrées et

Fig. 127.



qu'elles agissent en des points déterminés sur les articulations; en négligeant les termes qui renferment p et en désignant par

l la portée entre deux appuis A et B,

$G_1, G_2 \ldots G_m$ les poids agissant aux articulations,

$g_1, g_2 \ldots g_m$ les abscisses des articulations, A étant pris comme origine

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots . \mathfrak{M}_m$ les moments de flexion relatifs aux articulations 1, 2 . . . . m,

$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots . \mathfrak{B}_m$ les efforts tranchants, constants sur la longueur d'un panneau, pris relativement à une section faite à gauche des articulations 1, 2 . . . . m, nous obtiendrons,

$$170) \quad \begin{cases} A = \left(1 - \frac{g_1}{l}\right) G_1 + \left(1 - \frac{g_2}{l}\right) G_2 + \left(1 - \frac{g_3}{l}\right) G_3 + \ldots \\ B = \frac{g_1}{l} G_1 + \frac{g_2}{l} G_2 + \frac{g_3}{l} G_3 + \ldots \end{cases}$$

donc pour l'effort tranchant dans le panneau situé à gauche du point m

$$\mathfrak{B}_m = A - G_1 - G_2 \ldots . - G_{m-1} \quad . \; . \quad 171)$$

et pour le moment de flexion au point m

$$172) \quad \mathfrak{M}_m = Ag_m - G_1 (g_m - g_1) - G_2 (g_m - g_2) \ldots . - G_{m-1} (g_m - g_{m-1}).$$

Les équations 171) et 172) s'appliquent également aux *poutres continues* dès que les réactions sur les culées sont connues, (où a désigne la portée AB, et b la portée BC); les formules restent les mêmes pour l'ouverture AB; pour l'ouverture BC, il faut introduire la réaction sur l'appui B avec son bras de levier $(g_m - a)$, d'où résulte:

$$171^a) \quad \mathfrak{B}_m = A - G_1 - G_2 \ldots . + B \ldots . - G_{m-1}.$$

$$172^a) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_m = Ag_m - G_1 (g_m - g_1) - G_2 (g_m - g_2) \ldots . \\ \qquad + B (g_m - a) - \ldots . - G_{m-1} (g_m - g_{m-1}). \end{cases}$$

Si, d'après l'équation 172) (ou 172^a), on forme la valeur $\mathfrak{M}_{m-1}$ et qu'on la déduise de celle de $\mathfrak{M}_m$, on obtient:

$$\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1} = \mathfrak{B}_m (g_m - g_{m-1})$$

d'où résulte:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}}{g_m - g_{m-1}} \quad . \; . \; . \quad 173)$$

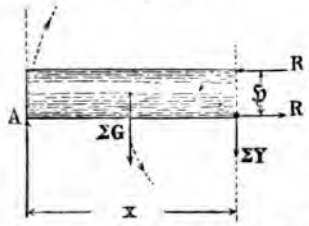
La valeur $\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}$ représente l'augmentation du moment de flexion sur la longueur du panneau $d = g_m - g_{m-1}$; pour une longueur infiniment petite, c'est-à-dire pour une augmentation continue de $\mathfrak{M}$, l'équation 173) devient identique à l'équation 18) développée dans le chapitre premier:

$$\mathfrak{B} = \frac{d\,\mathfrak{M}}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 173^a)$$

Si nous prenons la direction *de la pesanteur comme positive*, $\mathfrak{B}$ sera négatif aussi longtemps que $A > (G_1 + G_2 \ldots . + G_{m-1})$, d'où résulte que $\mathfrak{B}$ négatif a la même direction que la réaction sur les appuis.

Pour une poutre reposant librement sur deux appuis, $\mathfrak{M}$ a toujours le même signe, que nous avons regardé comme positif, d'où il résulte que la rotation correspondant à la réaction sur les appuis doit aussi être prise positive; dans une poutre continue, $\mathfrak{M}$ est négatif dans le voisinage des appuis intermédiaires, parce que le moment des charges agissant de bas en haut dépasse le moment de la réaction sur les appuis. Les valeurs de ΣY et ΣXy sont égales, mais de signe contraire à celles de $\mathfrak{V}$ ou de $\mathfrak{M}$ (voir N°. **4**), d'où résulte, d'après les considérations ci-dessus développées, que ΣY négatif agit dans le même sens que la pesanteur, et qu'une rotation *positive* ΣXy est opposée au moment de la réaction sur les appuis (voir fig. 128).

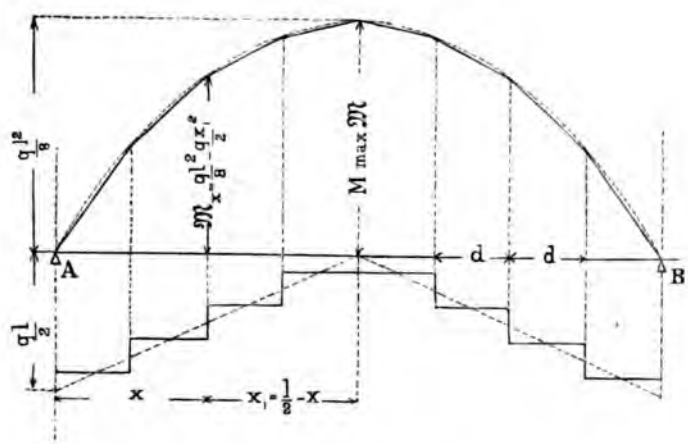
Fig. 128.



Ces considérations sont importantes lorsqu'on recherche les parties de la construction qui sont soumises à la tension ou à la pression.

125. Si, dans la fig. 127, nous prenons des distances égales entre les articulations et que les poids y agissant soient égaux, si, en outre, on porte comme ordonnées les $\mathfrak{V}$ et les $\mathfrak{M}$ calculés d'après les équations 171) et 172), on trouve que tous les $\mathfrak{M}$ calculés pour les diverses articulations se trouvent sur une parabole dont l'axe est vertical, comme le représente la fig. 129, tandis que par l'augmentation constante de l'effort tranchant, les

Fig. 129.



ordonnées de $\mathfrak{V}$, portées au milieu des panneaux, doivent se trouver sur une ligne droite qui au milieu de la portée, passe sur l'axe des abscisses (d'après l'équation 171).

Il résulte des remarques précédentes et surtout de l'équation 171), que l'effort vertical est constant entre deux articulations successives; c'est pourquoi, pour un treillis; la courbe des $\mathfrak{V}$ forme un polygone en escalier, comme le représente également la fig. 129. — Puisque $\mathfrak{V}$ est constant sur la longueur d'un panneau, il résulte, d'après la relation $\mathfrak{V} = \frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,x}$ donnée par l'équation 173[a]), que la courbe des $\mathfrak{M}$ entre deux articulations consécutives doit être une ligne droite, ensorte que cette courbe forme un polygone inscrit dans la parabole.

Si les poids agissant sur chacune des articulations correspondent à la *charge maximum* q *également répartie*, le polygone des $\mathfrak{M}$ se trouve entouré de la parabole de la charge maximum uniformément répartie; dès que l'ordonnée du sommet de la parabole $\frac{q\,l^2}{8}$ est connu, les divers points de la parabole se trouvent facilement d'après l'équation 93[b]):

$$\mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} - \frac{q\,x_1^{\,2}}{2} \quad \ldots\ldots\ 174)$$

x_1 représente la distance horizontale entre le point considéré et le milieu de la poutre.

Lorsque la distance des articulations est variable, la méthode indiquée dans la fig. 129 reste la même, pourvu que la charge soit également répartie et transmise sur les articulations d'après la loi du levier; tous les points du polygone se trouvent sur la parabole de la charge maximum uniformément répartie, et de plus, la ligne droite $\mathfrak{V}$ simultanée aura, au milieu du treillis, un point de contact commun avec la courbe en escalier $\mathfrak{V}$ du treillis.

126. On se fera une idée claire du rapport existant entre les courbes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{V}$ du treillis et les courbes correspondantes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{V}$ qui augmentent d'une manière continue, si l'on soustrait des ordonnées de ces dernières, les valeurs correspondant aux pièces de pont, donc les efforts tranchants $\Delta\mathfrak{V}$ et les moments de flexion $\Delta\mathfrak{M}$, (en se rappelant que la différence entre deux couples est encore un couple).

Il résulte directement de ces observations, que les deux courbes ont des points communs où $\Delta\mathfrak{V}$ et $\Delta\mathfrak{M}$ sont nuls.

Si l'on fait usage des développements ci-dessus pour une poutre reposant librement sur deux appuis et chargée d'une *manière uniforme*, il en résulte que les $\mathfrak{M}$ pour les *articulations* et les $\mathfrak{V}$ pour *le milieu* de chaque panneau sont égaux, tant pour la construction

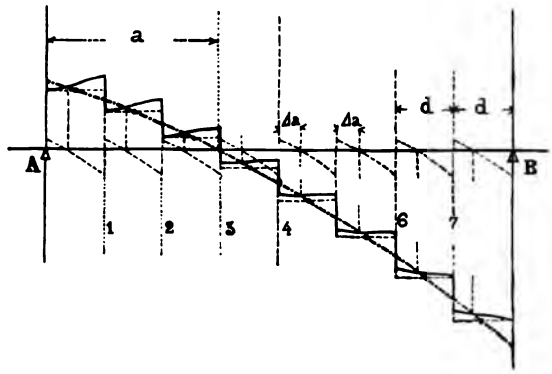
totale, que pour la poutre principale seulement, ainsi que nous l'avons déjà vu dans le N°. **125**. Si la charge est variable sur la longueur d'un panneau, il faudra déterminer, d'après la théorie du levier, le point $\Delta\mathfrak{B} = 0$ qui donne en même temps max $\Delta\mathfrak{M}$.

Si en outre les entretoises doivent être considérées comme des poutres continues, $\Delta\mathfrak{M}$ ne sera pas nul aux articulations, mais il y aura une valeur négative déterminée, et le point où les deux courbes des $\mathfrak{M}$ se coupent (c'est-à-dire le point $\Delta\mathfrak{M} = 0$) doit être déterminé d'après la loi déjà indiquée dans le § 8 pour les poutres continues; on trouvera par-là aussi le point $\Delta\mathfrak{B} = 0$ qui coïncidera avec le point max $\Delta\mathfrak{M}$.

127. D'après ce que nous avons vu au N°. **59**, le maximum de l'effort tranchant, en un point x d'une poutre reposant librement sur deux appuis, aura lieu lorsque la surcharge uniformément répartie atteindra le point considéré x; la courbe des max $\mathfrak{B}_x$ se trouvera d'après les équations 96) et celles des $\mathfrak{M}_x$ simultanés, d'après les équations 97).

La courbe des max $\mathfrak{B}_x$ ne représente pas les efforts tranchants qui agissent sur le *treillis*, puisque les $\Delta\mathfrak{B}$ renfermés dans les entretoises doivent être soustraits; on fera la soustraction en construisant la courbe des max $\Delta\mathfrak{B}$ pour chaque panneau, comme cela a eu lieu dans la fig. 130ª.

Fig. 130ª.

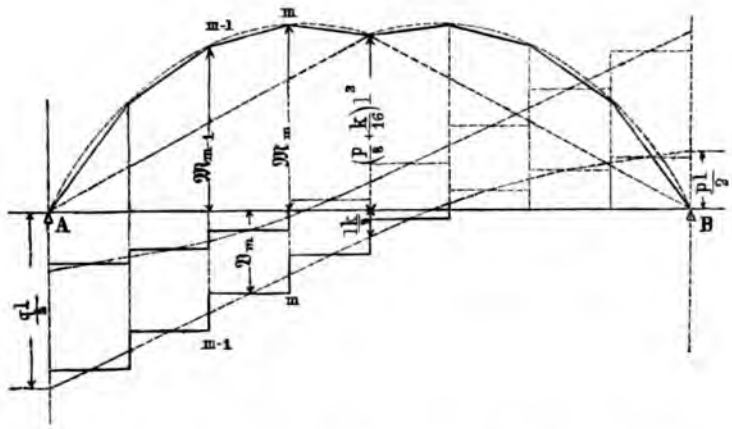


Dans cette figure, nous supposons qu'une charge uniformément répartie s'avance de A vers B et que l'on construise $\mathfrak{B}_x$ et $\Delta\mathfrak{B}$ pour chaque extrémité (en tête) de la surcharge; nous aurons pour chaque position de la surcharge une valeur déterminée de l'effort tranchant $\mathfrak{B}_m$ du treillis comme différence des valeurs de $\mathfrak{B}_x$ et de $\Delta\mathfrak{B}$; cette valeur $\mathfrak{B}_m$, calculée pour l'extrémité de la surcharge,

existe aussi pour toute la longueur du panneau, puisque l'effort tranchant y est constant. La courbe en escalier du treillis, que montre la fig. 130ª, est donc une représentation graphique de *toutes* les valeurs $\mathfrak{B}_m$ qui agissent dans le treillis lorsque la surcharge avance d'une manière uniforme et que son extrémité se trouve dans le panneau considéré; cette courbe nous donne le point jusqu'où la surcharge doit s'avancer afin de procurer un *maximum* d'effort tranchant dans le panneau.

D'après la fig. 130ª, nous voyons qu'entre $\mathfrak{B} = o$ et l'appui B, le max $\mathfrak{B}_x$ calculé pour le milieu du panneau, se trouve à-peu-près égal à celui de maximum $\mathfrak{B}_m$ du treillis; de même, entre A et $\mathfrak{B} = o$, où chacun des max $\mathfrak{B}_x$ est négatif, le $\mathfrak{B}_x$ calculé pour le milieu du panneau correspond au minimum négatif, donc à la valeur *relative* maximum de $\mathfrak{B}_m$. — Nous en concluons que le max $\mathfrak{B}_x$ pour le milieu du panneau, représente également dans ce dernier la valeur de l'effort tranchant maximum $\mathfrak{B}_m$; c'est sur cette conséquence que se fonde la construction indiquée dans la fig. 130ᵇ, où la charge arrive de A ou de B et où les valeurs

Fig. 130ᵇ.



relatives maxima et minima de $\mathfrak{B}_m$ sont données par des lignes droites en escalier, qui renferment toutes les valeurs possibles de $\mathfrak{B}_m$.

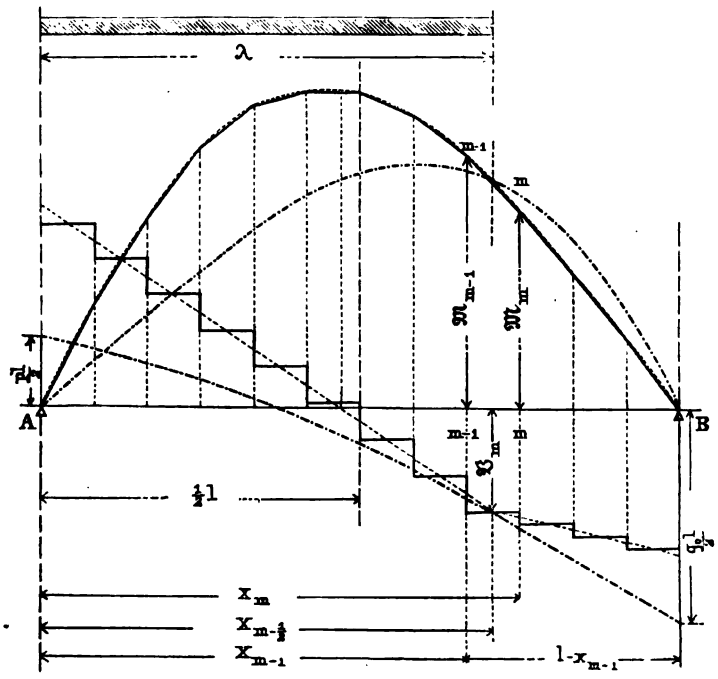
Dans la fig. 130ᵇ, on a porté aussi pour les deux courbes $\mathfrak{B}_x$ les valeurs correspondantes de $\mathfrak{M}_x$; en retranchant de ces dernières d'une manière graphique les valeurs $\Delta\mathfrak{M}$, on obtient pour le milieu de chaque panneau, des valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}_m$. Comme nous avons supposé la charge arrivée jusqu'au milieu du panneau considéré, d désignant la longueur du panneau, la valeur $\mathfrak{B}_m$

sera trop grande de $\frac{k\,d}{8}$. Cette différence disparaît si l'on se figure la surcharge du panneau demi-chargé concentrée à l'articulation voisine chargée, ce qui ne produit qu'un changement assez faible de la pression sur la culée, donnée d'après l'équation 91).

La méthode représentée par la fig. 130^b peut être appliquée directement en pratique, lorsque, dans chacun des panneaux, outre max $\mathfrak{V}_m$, une seule valeur simultanée (moyenne) de $\mathfrak{M}$ est jugée suffisante pour le calcul, ou bien aussi, lorsque quelques dimensions ne dépendent que de max $\mathfrak{V}_m$, valeurs maxima qui sont assez exactement représentées par la fig. 130^b, comme nous l'avons démontré ci-dessus.

128. Lorsque *deux ou plusieurs valeurs simultanées de* $\mathfrak{M}$ seront nécessaires pour déterminer les dimensions de coupe d'une partie d'un treillis, on ne pourra plus employer directement la fig. 130^b;

Fig. 131.



à chaque longueur de la surcharge correspond une courbe des $\mathfrak{M}_x$ formée de deux paraboles, courbe qui n'a qu'un point commun

avec la courbe des $\mathfrak{M}$ déterminée d'après l'équation 97) et représentée dans la fig. 130^b.

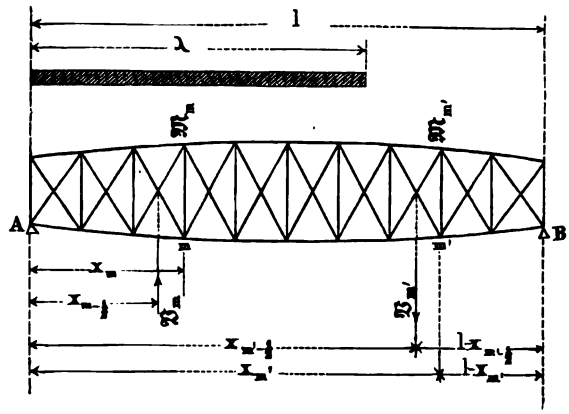
La fig. 131 représente le cas où la surcharge k s'est avancée de A jusqu'au milieu du panneau (m — 1), où se coupent les deux courbes des $\mathfrak{M}_x$ et les deux courbes des $\mathfrak{B}_x$.

On a représenté les courbes du treillis, pour la longueur adoptée de la charge, d'après la méthode indiquée au N° **125**; la courbe $\mathfrak{B}$ du treillis coïncide toujours au milieu du panneau avec la courbe simultanée de $\mathfrak{B}_x$, excepté dans le panneau demi-chargé, où l'horizontale correspondante du treillis devrait être rapprochée de la valeur $\frac{dk}{8}$ de l'axe des abscisses. Cette exception disparaît si l'on a soustrait la grandeur $\frac{dk}{8}$, d'après les motifs énoncés dans le N° **127**.

La courbe des $\mathfrak{M}$ du treillis coïncide avec celle des $\mathfrak{M}_x$ aux d'articulation, comme nous l'avons déjà souvent mentionné.

Nous supposons donc la charge arrivée jusqu'au milieu d'un panneau quelconque et nous désignerons par m une articulation située à gauche de l'extrémité de la charge, par m′ une articulation située à droite, comme le représente la fig. 132; en se servant pour les treillis des formules développées dans les N^{os}. **59** et **62**, et en nommant:

Fig. 132.



p le propre poids du pont par unité de longueur pour une voie, de même k le poids par unité de longueur de la surcharge, q = p + k la charge maximum,

nous obtiendrons, en employant les lettres qu'indique la fig. 132, pour le mouvement de la charge de A vers B:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p\,l}{2} + \lambda\,k\,\frac{2\,l-\lambda}{2\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \\ B &= \frac{p\,l}{2} + \lambda\,k\,\frac{\lambda}{2\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad 175)$$

et pour la partie chargée, voisine de A:

$$\mathfrak{V}_x = A - (k+p)\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176)$$

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - (k+p)\,\frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177)$$

pour la partie non-chargée, voisine de B:

$$\mathfrak{V}_x = B - p\,(l-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178)$$

$$\mathfrak{M}_x = B\,(l-x) - p\,\frac{(l-x)^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 179).$$

Les valeurs $\mathfrak{V}_x$ et $\mathfrak{M}_x$ coïncident au milieu du panneau ou aux articulations, avec les valeurs $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ du treillis, (les $\mathfrak{V}$ d'une manière exacte lorsqu'on aura supposé la surcharge du panneau demi-chargé concentrée à l'articulation voisine chargée, ainsi que nous l'avons indiqué,) et l'on obtient pour la partie chargée, voisine de A:

$$\mathfrak{V}_m = A - (k+p)\,x_{m-1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176^a)$$

$$\mathfrak{M}_m = A\,x_m - (k+p)\,\frac{x_m^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177^a)$$

et pour la partie non-chargée, voisine de B:

$$\mathfrak{V}_{m'} = B - p\,(l - x_{m'-1/2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178^a)$$

$$\mathfrak{M}_{m'} = B\,(l - x_{m'}) - p\,\frac{(l-x_{m'})^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 179^a)$$

On peut calculer d'après les équations 176ª) et 179ª), toutes les valeurs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{V}$ pour un treillis, en supposant qu'une charge uniformément répartie se soit avancée de A vers B jusqu'au milieu d'un panneau quelconque.

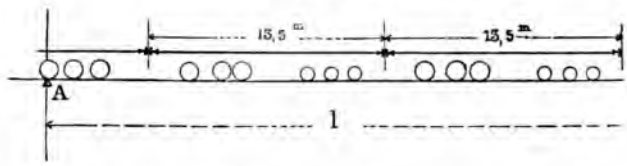
Lorsque la charge s'avance de B vers A, les valeurs de A et de B doivent être prises inversement dans les équations 176)—179) ou 176ª)—179ª); en outre, au lieu de x, il faudra placer la valeur $(l-x)$ et au lieu de $(l-x)$, celle de x.

129. Dans les développements précédents, on a supposé une même surcharge k par unité de longueur, agissant sur une partie plus ou moins grande du pont; toutefois nous avons introduit déjà dans le N°. **64** une valeur k' pour le cas où une moitié seulement est chargée, valeur donnée en même temps que celle de k dans

les tables XVII et XVII^a. Ces poids k′ ne sont plus exacts lorsque la longueur de la surcharge n'atteint pas ou dépasse la moitié du pont; aussi, dans beaucoup de cas, il faudra déterminer d'une manière plus précise la valeur k_λ de la surcharge qui correspond à une longueur quelconque λ.

La fig. 133 représente la disposition de locomotives (dont les dimensions sont indiquées dans la table XVII^a) pour une charge complète du pont, cas pour lequel la pression sur la

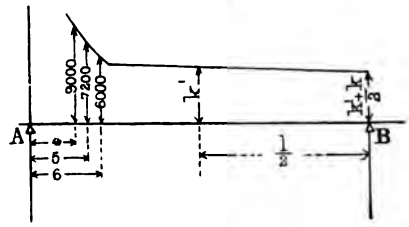
Fig. 133.



culée A, donc aussi l'effort tranchant près de celle-ci, atteint sa valeur maximum (lorsque 6 roues motrices se trouvent près de A). En faisant un usage répété de la théorie du levier, on trouve, pour toutes les portées, que la pression A_k sur la culée, résultant de la charge variable est assez exactement représentée par la valeur $\frac{k+k^1}{2} \cdot \frac{l}{2}$, lorsque k et k^1 sont pris, pour l'exemple considéré, dans la table XVII^a; l'expression k_λ a donc, pour la culée extrême, c'est-à-dire pour le cas où tout le pont est chargé, comme le représente la fig. 133, la valeur $\frac{k+k^1}{2}$, et nous pouvons supposer que k augmente également à partir de la culée extrême jusqu'au milieu du pont et encore plus loin, tandis qu'au commencement du mouvement (c'est-à-dire lorsque l'extrémité du train arrive sur le pont), la variation de k_λ a lieu d'après une autre loi, que nous allons trouver par les considérations simples qui suivent. — Si l'on se figure le poids de la locomotive, dont la distance totale des axes est de 3 mètres, répartie uniformément sur les 4, 5 et 6 premiers mètres du pont, un simple calcul montre que cette charge uniformément répartie fournit, pour chaque portée, (sensiblement) les mêmes pressions sur les appuis, et aussi avec de faibles modifications, les mêmes moments que si l'on avait calculé chaque fois le poids des 3 axes avec leurs bras de levier respectifs; la charge remplaçante k_λ est donc, pour des longueurs de surcharge de 4, 5 et 6 mètres, représentée par les valeurs $\frac{36000}{4}$, $\frac{36000}{5}$ et $\frac{36000}{6}$, et nous pourrons donner clairement par la figure 134 les résultats ainsi obtenus.

Pour de faibles ouvertures, la continuation rectiligne de la partie droite de la courbe dépasse en hauteur celle donnée par les valeurs 6000, 7200 et même 9000 kilogr.; il faudra donc

Fig. 134.



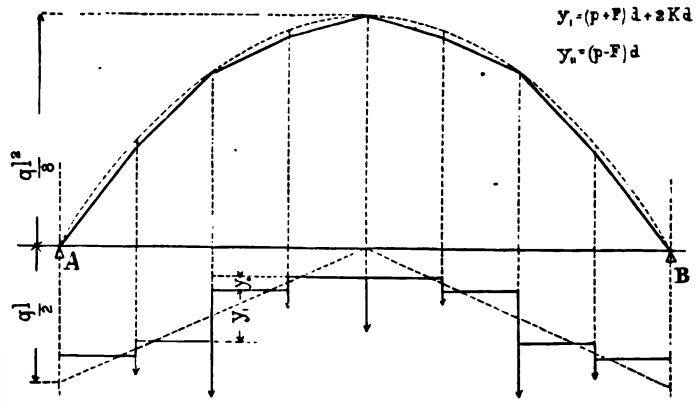
prendre ces premières valeurs, et cela, aussi longtemps qu'elles dépasseront les valeurs constantes de la partie de gauche.

La locomotive à marchandises sur laquelle se fondent la fig. 134 et la table XVII[a], peut être considérée comme une charge normale pour le calcul de ponts de lignes principales ordinaires; si toutefois, pour une ligne donnée ou pour quelque pont, on doit prendre comme base une autre locomotive, il faudra calculer pour ce cas k et k^1; dans le cas d'emploi de tenders particuliers, k_1 à la culée B peut toujours être placé égal à $\frac{k + k^1}{2}$, tandis que la valeur constante, pour la partie de gauche de la fig. 134, se laisse facilement déterminer d'après les considérations précédentes. — Pour des locomotives-tenders, on pourra poser $k^1 = k$, en ayant égard à la charge à-peu-près égale de tous les axes.

130. Dans les développements des N[os]. **125—128**, on doit distinguer les articulations chargées des articulations non-chargées; les premières sont contenues dans la longueur λ de la surcharge, qui du reste peut aussi renfermer des articulations non-chargées, ce qui aura surtout lieu lorsque les nervures supérieures ou inférieures sont seules chargées; il peut donc se trouver des articulations non-chargées dans le cas de charge uniformément répartie sur toute la longueur du pont, toutefois elles sont toujours affectées du poids propre de la construction qu'elles ont à supporter.

La fig. 135 représente un cas simple de ce genre, les articulations non-chargées n'ont à supporter que le poids (p — F) d de la poutre sur la longueur d du panneau (F représente le poids du tablier toujours supporté par les articulations chargées), tandis que les articulations chargées, outre le poids propre de

Fig. 135.

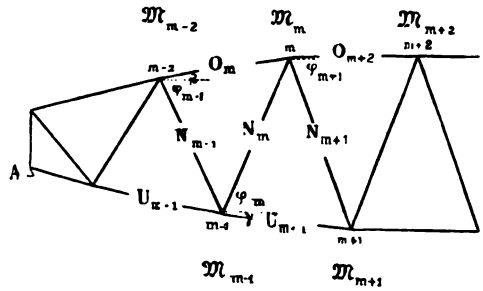


la construction (p + F) d, ont encore à supporter la charge variable, égale à 2 kd.

131. Passant à l'étude *de simples treillis*, nous indiquerons comme *système simple, symétrique*, celui où toutes les barres sont inclinées; nous le nommons symétrique, parce qu'un même nombre de barres sont inclinées dans les deux sens, et d'une manière à-peu-près égale (voir fig. 136).

En supposant que pour un mode de charge quelconque, le polygone des $\mathfrak{M}$ et la courbe des $\mathfrak{B}$ en escalier aient été déterminés d'une manière quelconque, par exemple d'après les équations 170)—172) ou d'après les équations 176)—179) — et que

Fig. 136.



chacune des articulations d'un treillis symétrique simple soit numérotée de A vers B comme le représente la fig. 136; nommant:

$\mathfrak{M}'_{m-1}$, $\mathfrak{M}'_m$, $\mathfrak{M}'_{m+1}$ .... les moments de flexion aux points m — 1, m, m + 1 ..... pour *une* poutre principale;

Remarque. Les charges par unité de longueur p, k et q, ainsi que les valeurs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ sont calculées pour *une seule voie*, mais dans le calcul des forces d'un treillis, elles doivent être réduites pour *une poutre principale;* ces dernières valeurs réduites, nous les nommerons $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{B}'$; ordinairement les valeurs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ doivent être prises de moitié, mais il arrive aussi d'autres répartitions de la surcharge.

$\mathfrak{B}'_{m-1}$, $\mathfrak{B}'_m$, $\mathfrak{B}'_{m+1}$ . . . les efforts tranchants dans les panneaux situés *à gauche* des articulations m — 1, m, m + 1 . . . . et réduits sur *une* poutre principale;

O_m, O_{m+2} . . . . les forces dans les parties de la nervure supérieure situées immédiatement *à gauche* des articulations m, m + 2 . . . .;

β_m, β_{m+2} . . . . les angles correspondants de la nervure supérieure avec l'horizon;

U_{m-1}, U_{m+1} . . . . les forces dans les parties d la nervure inférieure situées immédiatement *à gauche* des points m — 1, m + 1 . . . .;

γ_{m-1}, γ_{m+1} . . . . les angles correspondants de la nervure inférieure avec l'horizon

de plus:

N_m, N_{m+1} . . . . . les forces dans les barres situées immédiatement *à gauche* des points m, m + 1 . . . .;

φ_m, φ_{m+1} . . . . les angles correspondants des barres avec l'horizon;

enfin:

$\mathfrak{H}_m$, $\mathfrak{H}_{m+1}$ . . . . la distance verticale des centres de gravité des nervures aux points m, m + 1 . . . .

Considérons une barre N_m (chaque partie d'un treillis peut être désignée par les mêmes notations que les forces dans cette partie), et supposons deux sections verticales faites immédiatement à gauche ou à droite des points (extrêmes) m et m — 1 de la barre considérée, nous obtenons:

pour la coupe faite immédiatement à gauche du point m

$$U_{m+1} \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 180)$$

pour la coupe située immédiatement à droite du point m—1

$$O_m \cos \beta = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 181)$$

Remarque. Lorsque les angles auront le même index que les forces adjacentes respectives, nous supprimerons ordinairement l'index dans les premiers.

Puisque les forces dans les nervures et dans les barres entre deux articulations sont constantes, chacune des sections verticales mentionnées fournira la relation

$$N_m \cos \varphi + U_{m+1} \cos \beta - O_m \cos \gamma = 0$$

et remplaçant les valeurs données par les équations 180) et 181), on obtient:

$$N_m \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad 182)$$

Les équations 180)—182) suffisent à déterminer toutes les forces qui agissent dans un treillis simple et symétrique; on obtient une autre équation souvent plus commode et pouvant servir à déterminer les forces dans les barres, en écrivant que la somme des composantes verticales des forces, atteintes par une même section verticale, doit être égale à l'effort tranchant $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}'_m = U_{m+1} \sin \gamma + O_m \sin \beta \pm N_m \sin \varphi$$

et en remplaçant les valeurs tirées des équations 180) et 181)

$$\pm N \sin \varphi = \mathfrak{B}'_m + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} tg\, \gamma_{m+1} + \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} tg\, \beta_m \quad 183)$$

Dans beaucoup de cas, surtout lorsque la longueur des panneaux est faible relativement à la portée, la formule 183) se simplifie par l'introduction d'une valeur moyenne $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ et devient

$$\pm N_m \sin \varphi = \mathfrak{B}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} (tg\, \beta + tg\, \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad 184)$$

dans laquelle $\mathfrak{M}'_{m-1/2}$ et $\mathfrak{H}'_{m-1/2}$ sont comptés au milieu du panneau (m — 1) m.

132. A l'aide des équations 182) et 183) et des considérations de la fin du N°. **124**, nous pourrons toujours savoir si une barre est *soumise à la traction ou à la compression*; nous atteindrons néanmoins plus rapidement ce but au moyen des règles spéciales qui vont suivre.

Considérons d'abord une poutre reposant librement sur deux appuis; on s'assurera facilement que la nervure supérieure est toujours soumise à la compression et la nervure inférieure à la traction, ce qui résulte aussi évidemment de la forme générale d'une telle poutre, ensuite de la flexion sous l'action d'une charge.

Afin de rechercher la force qui agit dans une barre, nous supposons que la valeur $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ait été calculée pour toutes les articulations et que cette valeur $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ait atteint un maximum au point m, pour diminuer soit à droite soit à gauche (voir fig. 137).

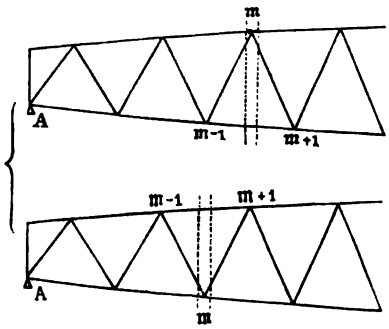
Une coupe à gauche du point $m = \max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ montre, si le point m est situé dans la nervure supérieure, que la barre N_m doit être soumise à un effort dirigé dans le même sens que celui de la

portion O_m, donc soumis à une *compression*, puisque nous avons supposé $U_{m+1} \cos \gamma > O_m \cos \beta$.

Lorsque le point m se trouve dans la nervure inférieure, on a $O_{m+1} \cos \beta > U_m \cos \gamma$ et par conséquent N_m agit dans le même sens que la nervure inférieure, donc la barre est soumise à un effort de *traction*.

A l'aide d'un raisonnement analogue, on trouve que la barre N_{m+1} est soumise à la traction ou à la compression, suivant que

Fig. 137.



le point $m = \max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ se trouve sur la nervure inférieure ou sur la nervure supérieure.

Nous voyons donc que les barres situées à gauche et à droite du point $m = \max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ sont soumises à des efforts qui agissent dans le même sens, tandis que ces barres sont dirigées en sens inverse, d'où nous déduisons: *qu'au point max* $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, *la pression et la tension changent de signe dans les barres de même direction.*

On verra également, par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, que la pression et la tension doivent aussi changer de signe dans des barres parallèles pour le point $\min \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, et si nous nous figurons la poutre entière divisée en différents fragments limités par les soutiens et par les points $\max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ et $\min \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, nous pourrons, pour une poutre reposant librement sur deux appuis, poser les règles générales suivantes:

1) Les forces dans les barres inclinées dans le même sens changent de signe aux points $\max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ et $\min \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, c'est-à-dire

que les barres tirées ont des directions opposées à celles des barres comprimées.

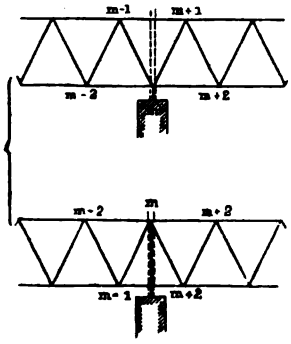
2) Une barre sera soumise à la *tension*, lorsque son extrémité inférieure sera plus rapprochée du point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ que son extrémité supérieure; et une barre sera soumise à la *compression*, lorsque son extrémité supérieure sera plus rapprochée du point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ que son extrémité inférieure.

3) Une barre sera soumise à la *compression*, (ou à la *tension*) lorsque son extrémité supérieure sera plus éloignée (ou plus rapprochée) du point min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ que son extrémité inférieure.

Remarque. Il est évident que les règles 2) et 3) donnent les mêmes résultats pour des barres situées entre max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ et min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$.

Ces règles, qui sont données pour des poutres reposant librement sur deux appuis, peuvent également être appliquées aux *poutres continues*, pourvu qu'on considère les valeurs négatives de $\mathfrak{M}$ comme devenant d'autant plus petites que la valeur $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ s'éloigne de zéro; il en résulte alors pour les appuis intermédiaires, où $\mathfrak{M}$ atteint sa valeur négative maximum, une valeur min $\mathfrak{M}$ qui, en règle générale, représentera aussi min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ (car l'augmentation de $\mathfrak{H}$ est toujours plus faible que celle de $\mathfrak{M}$), tandis qu'en cet endroit la nervure inférieure est soumise à la compression et la nervure supérieure à la traction; deux coupes faites à gauche et à droite de min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ (près du point ou sur le point d'appui intermédiaire), montrent que les deux barres ainsi coupées seront soumises à la *compression*, lorsque O_m négatif sera numériquement plus grand que U_{m-1} et que U_{m+1}, tandis qu'elles seront soumises à la *traction* lorsque $U_m > O_m$ et $> O_{m+1}$ (voir fig. 138).

Fig. 138.



La règle 3) ci-dessus s'applique donc aussi aux poutres continues, par conséquent la règle 2) doit aussi être applicable pour les points max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, ensorte que les 3 règles ci-dessus indiquées restent les mêmes pour des poutres continues, pourvu qu'on considère comme minima, les valeurs numériques négatives maxima.

134. Un *système simple non-symétrique*, dont les barres sont en partie *verticales*, a toujours la même $\mathfrak{M}$ pour deux articulations situées dans le même plan vertical; les changements de la courbe $\mathfrak{V}$ ont aussi toujours lieu sur la verticale passant par deux articulations et ils restent toujours les mêmes, que l'articulation inférieure ou la supérieure soit chargée.

Il sera donc préférable, pour ce système simple non-symétrique, de noter par les mêmes lettres m, m + 1 .... les deux articulations situées sur la même verticale; non seulement les formules seront essentiellement simplifiées, mais aussi cette notation est conforme à la distribution des panneaux correspondant aux changements de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{V}$.

Comme pour un treillis simple symétrique, nommons:

$\mathfrak{M}'_m$, $\mathfrak{M}'_{m+1}$.... les moments de flexion aux articulations m, m + 1 .... (ou bien aux verticales correspondantes) pour *une poutre principale;*

$\mathfrak{V}'_m$, $\mathfrak{V}'_{m+1}$.... les efforts tranchants situés immédiatement *à gauche* des verticales m, m + 1.... également pour *une poutre principale;*

O_m, O_{m+1}.... les forces dans la nervure supérieure situées immédiatement *à gauche* des verticales m, m + 1....;

β_m, β_{m+1}.... les angles avec l'horizon correspondants;

U_m, U_{m+1}.... les forces dans la nervure inférieure situées immédiatement *à gauche* des verticales m, m + 1....;

γ_m, γ_{m+1}.... les angles avec l'horizon correspondants;

N_m, N_{m+1}.... les forces qui agissent dans les barres inclinées situées immédiatement *à gauche* des verticales m, m + 1....;

φ_m, φ_{m+1}.... les angles avec l'horizon correspondants;

V_m, V_{m+1}.... les forces dans les verticales m, m + 1....;

$\mathfrak{H}_m$, $\mathfrak{H}_{m+1}$.... la distance verticale des centres de gravité des nervures aux articulations m, m + 1....

Lorsque plusieurs barres inclinées auront des directions différentes pour une même poutre, nous désignerons par

T_m, T_{m+1}.... les forces dans les barres inclinées, opposées à la direction de N;

ψ_m, ψ_{m+1}.... les angles avec l'horizon correspondants.

Si nous considérons dans les fig. 139 et 140, deux sections faites immédiatement *à gauche* et *à droite* de l'articulation m, et si nous nous figurons une rotation autour du point m sur lequel

vient se terminer une des extrémités de la barre coupée, il résulte de la fig. 139:

$$O_{m+1} \cos \beta = U_m \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \; . \quad 186)$$

et de la fig. 140:

$$O_m \cos \beta = U_{m+1} \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \; . \quad 187)$$

Fig. 139.

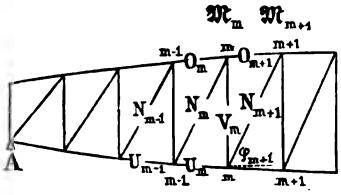
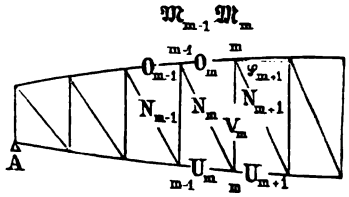


Fig. 140.



En examinant les fig. 139 et 140, nous remarquons que les deux forces dont les composantes horizontales sont équivalentes d'après les équations 186) et 187), sont atteintes par des lignes droites parallèles à la direction de la diagonale, ce qui peut servir à mieux faire comprendre les équations 186) et 187).

Si l'on détermine aussi les valeurs $\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$, puis les forces O_{m-1} et U_{m-1} — et que, pour une section verticale quelconque, on écrive la somme des composantes horizontales, à savoir, d'après la fig. 139:

$$N_m \cos \varphi = U_m \cos \gamma - O_m \cos \beta \quad . \; . \quad \text{I.}$$

et d'après la fig. 140:

$$N_m \cos \varphi = O_m \cos \beta - U_m \cos \gamma \quad . \; . \quad \text{II.}$$

on obtient par ces équations I. et II., en remplaçant les valeurs tirées des équations 186) ou 187), la même valeur:

$$N_m \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \; . \quad 188)$$

L'équation 188) peut servir à déterminer d'une manière tout-à-fait générale les forces dans les barres d'un système simple non-symétrique; le choix du signe $\pm$ se donnera de la manière suivante:

La barre N_m est soumise à la *compression*, lorsque la composante horizontale $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ de la nervure soumise à la traction est plus grande que celle de la nervure soumise à la pression; elle sera soumise à la *traction*, lorsqu'au contraire la composante horizontale de la nervure soumise à la compression sera plus grande.

Des deux côtés du point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, la différence des composantes dans les nervures a un signe différent, ensorte qu'en ce point, les barres à inclinaison commune doivent aussi agir en sens opposé; il en sera de même au point min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, ensorte que, si l'on considère une poutre reposant librement sur deux appuis, chaque barre sera soumise à la *traction* lorsque son extrémité inférieure sera plus rapprochée du point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ou plus éloignée du point min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ que son extrémité supérieure, et une barre sera soumise à la *compression*, lorsque son extrémité inférieure sera plus rapprochée du point min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ou plus éloignée du point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ que son extrémité supérieure, et nous trouvons, en généralisant ce développement, que les *trois règles* du N°. **134** pour un système symétrique, s'appliquent aussi à un système non-symétrique, aussi bien pour une poutre reposant librement sur deux appuis, que pour une poutre continue.

Les équations 186)—188) suffisent à la détermination des forces qui agissent dans les nervures et dans les barres inclinées, toutefois on trouvera souvent plus facilement la force dans la barre au moyen de la détermination des composantes verticales. Il résulte d'une section faite à gauche de l'articulation m:

$$\mathfrak{V}'_m = O_m \sin\beta - U_m \sin\gamma \pm N_m \sin\varphi$$

d'après la fig. 139:

$$N_m \sin\varphi = -\mathfrak{V}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg}\gamma_m - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg}\beta_m \quad . \quad 189)$$

et d'après la fig. 140:

$$N_m \sin\varphi = \mathfrak{V}'_m + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg}\beta_m + \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg}\gamma_m \quad . \quad . \quad 190)$$

N positif indique une traction et $\mathfrak{V}$ voisin de A est négatif.

Dans beaucoup de cas, et surtout lorsqu'il existera un grand nombre de panneaux, il sera suffisant d'introduire une valeur moyenne pour $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, et l'on obtient ainsi la formule approximative:

$$N_m \sin\varphi = -\mathfrak{V}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 191)$$

dans laquelle $\mathfrak{M}'_{m-1/2}$ et $\mathfrak{H}_{m-1/2}$ sont pris au milieu de m et de m—1.

135. Pour la détermination des forces dans les *barres verticales*, il est surtout nécessaire de connaître de quelle manière la charge est répartie sur les articulations supérieures ou sur les

inférieures; l'équilibre doit exister entre les forces agissant sur chaque point et comme les forces qui agissent dans les nervures et dans les barres inclinées sont connues d'après le N°. **134**, il résultera un changement de valeur de la force V dans la barre verticale pour un changement de répartition des charges des articulations supérieures et inférieures.

Afin de trouver la force V_m, nous nous figurons la verticale m m atteinte par une coupe oblique faite à-peu-près parallèlement

Fig. 141.

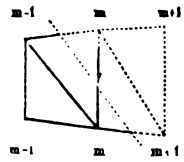
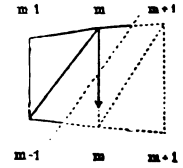


Fig. 142.



à la direction des barres inclinées (voir fig. 141 et fig. 142), nommons:

P'_0 la charge agissant sur l'articulation supérieure,
P'_u celle agissant sur l'articulation inférieure.

D'après la fig. 141, si nous plaçons l'origine des coordonnées en A et que nous prenions la direction de la pesanteur positive (ensorte que $\mathfrak{B}$ voisin de A est négatif), la valeur $\mathfrak{B}'_m + P'_0$ représentera la somme des composantes verticales des forces extérieures qui agissent à gauche de la coupe considérée et en introduisant la valeur tirée de l'équation 185), nous aurons immédiatement:

$$\mathfrak{B}'_m + P'_0 = -\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}(\operatorname{tg}\beta_{m-1} + \operatorname{tg}\gamma_m) + V_m$$

$$V_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}(\operatorname{tg}\beta_{m+1} + \operatorname{tg}\gamma_m) + \mathfrak{B}'_m + P'_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 192)$$

Remplaçant de même la valeur tirée de l'équation 186), il résulte de la fig. 142)

$$V_m = -\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}(\operatorname{tg}\beta_m + \operatorname{tg}\gamma_{m+1}) - \mathfrak{B}'_m - P'_u \quad . \quad . \quad . \quad 193)$$

Il est encore à remarquer qu'on peut écrire

$$\mathfrak{B}'_m + P'_0 = \mathfrak{B}'_{m+1} - P'_u \text{ et}$$
$$\mathfrak{B}'_m + P'_u = \mathfrak{B}'_{m+1} - P'_0.$$

Les fig. 141) et 142) ne s'appliquent pas aux verticales où $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ atteint sa valeur maximum ou sa valeur minimum; dans ce cas, la

direction des barres soumises à la pression ou à la tension change de signe (voir le numéro précédent et les règles du numéro **132**).

Fig. 142a.

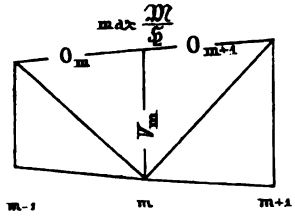
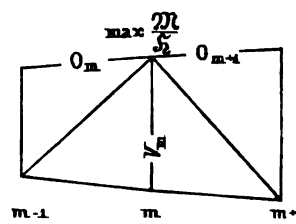


Fig. 142b.



Si *toutes* les diagonales sont soumises à la *traction*, leurs extrémités inférieures sont dirigées vers le point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$; en ce point, les diagonales agissent des deux côtés de l'articulation inférieure, tandis que l'articulation supérieure n'a aucune force de barre à supporter; il est donc facile d'écrire la condition d'équilibre pour ce dernier point et nous avons:

$$V_m = P'_0 \pm \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1}) \quad . \quad . \quad . \quad 194)$$

Le signe $\pm$ s'applique à l'inclinaison de la nervure, différente à partir du milieu du pont.

Si *toutes* les diagonales sont soumises à la *compression*, leurs extrémités supérieures sont dirigées vers le point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ et dans les verticales l'articulation inférieure n'a pas à supporter de forces inclinées dans les barres, et l'on obtient en écrivant les conditions d'équilibre pour ce dernier point:

$$V_m = P'_u \pm \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg}\gamma_m - \operatorname{tg}\gamma_{m+1}) \quad . \quad . \quad . \quad 194^a)$$

Dans les équations 192)—194a), V positif indique une *compression* et V négatif une *tension*, pourvu que les signes soient tous bien appliqués et que la direction de la pesanteur soit toujours regardée comme positive.

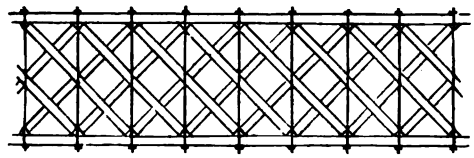
Il faudra surtout avoir égard aux signes des fonctions trigonométriques, qui, ordinairement, changent de signe au-delà du milieu du pont dans une poutre reposant librement sur deux appuis (lorsque la poutre est symétrique des deux côtés du pont).

136. Nous avons trouvé comme règle générale pour un système non-symétrique (ainsi que pour un système symétrique), qu'une barre est soumise à la traction lorsque son extrémité inférieure est plus rapprochée de la verticale max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ que son extrémité supérieure.

Puisque max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ change de position pour une variation de charge, il est aussi évident qu'une partie des barres sera alternativement soumise à la tension et à la compression. Dans les systèmes non-symétriques, on emploie souvent des barres qui ne peuvent supporter qu'une traction ou qu'une compression; il résulte donc que, pour les panneaux où les forces dans les barres changent de signe, on devra employer deux diagonales de sens opposé, dont une seule agira, à savoir celle dont l'extrémité supérieure ou inférieure est la plus rapprochée du point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, suivant que cette barre est construite pour résister à la compression ou à la traction.

Une barre construite pour résister seulement à la traction cessera d'agir en se courbant sous l'action d'une pression, ensorte qu'on peut se figurer cet assemblage comme n'existant pas lorsque la traction cesse; dans les barres comprimées, assemblées sans boulons, cette liaison cesserait d'agir en même temps que la barre viendrait à être soumise à la traction ainsi que cela a lieu, par exemple, dans le système de Howe représenté par la fig. 143.

Fig. 143.



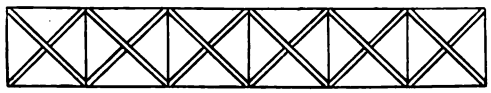
Les barres qui agissent principalement pour une charge partielle, se nomment *contre-fiches*; dans des poutres courbées dont les barres diagonales n'agissent pas ou ne travaillent que fort peu sous l'action d'une charge uniformément répartie, toutes les barres agiront alternativement comme contre-fiches, tandis que pour tous les autres systèmes, on considérera comme *barres principales*, celles qui travaillent sous l'action de la charge uniformément répartie.

137. Dans les considérations précédentes, il n'a pas été tenu compte de la possibilité que le treillis soit soumis à des efforts

de tension ou à des efforts de compression avant que la charge soit appliquée.

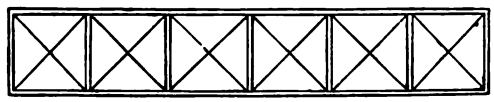
Lorsque, par un changement de charge, les contre-fiches doivent subitement entrer en action au lieu des barres principales, il sera indispensable de construire toutes les barres de manière qu'elles soient soumises à une traction ou à une compression primitive avant que la charge soit appliquée, et si — abstraction faite de toute charge — toutes les diagonales du système représenté par la fig. 144 sont également comprimées (les lignes doubles indiquent

Fig. 144.



les parties soumises à la compression), il est absolument nécessaire que toutes les verticales, ainsi que les deux nervures, soient également soumises à la traction; inversement, si dans la fig. 144ª, toutes les diagonales sont soumises à la traction, toutes les verticales seront soumises à la compression.

Fig. 144ª.



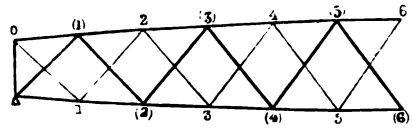
Si une poutre ainsi formée n'est d'abord que peu chargée, les barres principales et les contre-fiches restent toutes comprimées ou bien soumises à la traction; par une augmentation de charge, les contre-fiches peuvent peu-à-peu cesser d'agir et seront complétement déchargées, lorsque la barre de direction opposée travaille au maximum, d'où nous déduisons que, — tant que la pression ou que la tension primitive ne dépasse pas certaines limites, on pourra calculer les dimensions des barres principales pour la charge la plus défavorable exactement comme s'il n'existait pas de contre-fiches dans le treillis considéré.

Quant aux dimensions des contre-fiches, nous ferons une distinction entre les poutres droites et les poutres cintrées (courbées). — Dans ces dernières, on peut confondre les barres principales et les contre-fiches (ainsi que nous l'avons montré dans le N°. **136**) et l'on pourra calculer ordinairement toutes les diagonales d'après le maximum d'effort qu'elles auront à supporter sous l'action de la charge. — Dans les poutres droites, souvent sur une partie no-

table de la longueur, les contre-fiches ne sont pas du tout chargées, (ainsi que cela a lieu dans les constructions en bois du système Howe); les dimensions des contre-fiches se calculeront d'après la compression primitive qu'on a cru devoir admettre ou qui est survenue inopinément.

138. On obtient un *treillis double* lorsque deux barres principales viennent à se croiser. La fig. 145 représente un *treillis*

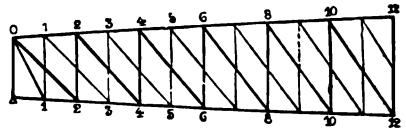
Fig. 145.



double, symétrique, dont les barres d'un des systèmes sont indiquées par des lignes plus fortes; les articulations 1, 2, 3, 4, 5 .... appartiennent à l'un des systèmes et les articulations (1), (2), (3), (4) .... à l'autre des systèmes.

La fig. 146 représente également un *système double, non-symétrique*; les articulations d'un des systèmes sont indiquées par les nombres impairs 1, 3, 5 .... et celles de l'autre système par les nombres pairs 2, 4, 6 ....

Fig. 146.



On peut faire le calcul exactement comme pour un treillis simple, en répartissant toutes les charges sur les articulations et en calculant pour chacun des deux systèmes les $\mathfrak{B}$ et les $\mathfrak{M}$ respectifs. Si, par exemple, les articulations supérieures sont chargées, nous avons à considérer dans la fig. 145 comme points chargés, les articulations 1, 3, 5 .... pour l'un des systèmes, et 2, 4, 6 .... pour l'autre; on construira d'après cela, des figures analogues aux fig. 129—131 ou bien on fera le calcul d'après les formules 170)—172) ou 176)—179).

En général, d'après ce que nous venons de voir, les $\mathfrak{M}_x$ correspondant à la même abscisse x sont différents pour les deux systèmes; seulement, lorsque les articulations supérieures et inférieures sont

également chargées, $\mathfrak{M}_x$ a la même valeur pour les deux systèmes d'un treillis double symétrique (fig. 145), d'où résulte une même composante horizontale pour les forces des deux barres, du même panneau.

La décomposition d'un système double en deux systèmes distincts a été quelquefois employée pour des ponts en treillis de grande dimension, par exemple pour le pont sur le Wéser à Hoexter et pour un pont analogue sur l'Elbe à Tangermunde, tous deux construits d'après le système de Mr. Schwedler.

Cette manière de calculer peut aussi être employée pour des treillis à croisements multiples; toutefois nous allons donner une méthode plus simple, qui peut aussi être employée pour un système double.

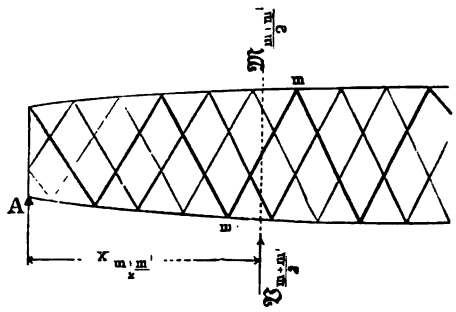
139. Si l'on applique à chacun des systèmes *d'un treillis multiple* les principes généraux énoncés dans le N°. **138**, on trouvera que, pour la même distance x, les valeurs de $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{V}$ de chacun des systèmes sont peu différentes les unes des autres, et cela d'autant moins, que le nombre des systèmes est plus grand. Pour un treillis à n systèmes, on pourra prendre pour chacun des systèmes:

$$(\mathfrak{M}_x) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{M}_x$$

$$(\mathfrak{V}_x) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{V}_x$$

où $\mathfrak{M}_x$ et $\mathfrak{V}_x$ indiquent les moments de flexion et les efforts tranchants de tout le système; les valeurs entre parenthèse sont celles d'un des systèmes.

Fig. 146ª.



On aura donc, pour une *barre inclinée* N_m, dont les extrémités sont indiquées par les lettres m et m' (voir fig. 146ª) et d'après

les équations 182) et 188), (aussi bien pour un système symétrique que pour un système non-symétrique):

$$N_m \cos \varphi = \frac{1}{n} \left(\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m'}}{\mathfrak{H}'_m} \right) \quad . \quad 195)$$

de même, il résulte des équations 184) et 191):

$$N_m \sin \varphi = \frac{1}{n} \left\{ \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} - \frac{\mathfrak{M}'_{\frac{1}{2}(m+m')}}{\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}(m+m')}} (tg\beta + tg\gamma) \right\} \quad . \quad 196)$$

où l'index $\frac{1}{2}(m+m')$ se rapporte au milieu de la barre considérée, point pour lequel $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(m+m')}$ représente l'effort tranchant du système complet.

Pour des systèmes multiples non-symétriques, il faut développer d'une manière spéciale les formules pour les *barres verticales* (montants, armatures) et l'on obtient par analogie aux équations 192) et 193), pour la fig. 139:

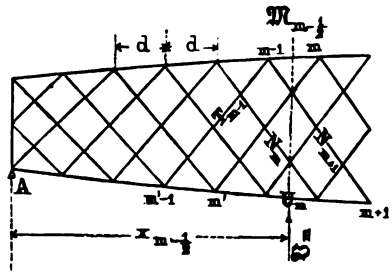
$$V_m = \frac{1}{n} \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (tg\,\beta_{m+1} + tg\,\gamma_m) + \frac{1}{n} \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} + P'_0 \quad . \quad . \quad 197)$$

équation dans laquelle $\mathfrak{B}_m$ indique l'effort tranchant immédiatement à gauche du point m, et d'après la fig. 140):

$$V_m = -\frac{1}{n} \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (tg\,\beta_m + tg\,\gamma_{m+1}) - \frac{1}{n} \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m)} - P'_u \quad 197^a)$$

140. Lorsque les forces dans les barres sont connues, on détermine les *forces dans les nervures* pour les divers systèmes de construction, d'après les règles suivantes:

Fig. 147.



A) pour un treillis symétrique, à croisements multiples, de nombres pairs.

On fera une coupe verticale passant par les points de croisement qui se trouvent les uns au-dessus des autres, situés immédiatement à gauche du point m, ensorte que $x_{m-\frac{1}{2}}$ représente

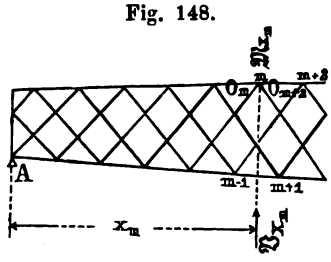
l'abscisse du point coupé, et en négligeant les différences des composantes horizontales des forces dans les barres rencontrées par cette section, nous obtenons:

$$O_m \cos\beta = U_m \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \quad . \; . \; . \quad 198)$$

formule dans laquelle O_m et U_m représentent, comme ci-dessus, les forces situées immédiatement à gauche de l'articulation m dans les nervures.

B) pour un treillis symétrique, à croisements multiples, de nombres impairs (voir fig. 148).

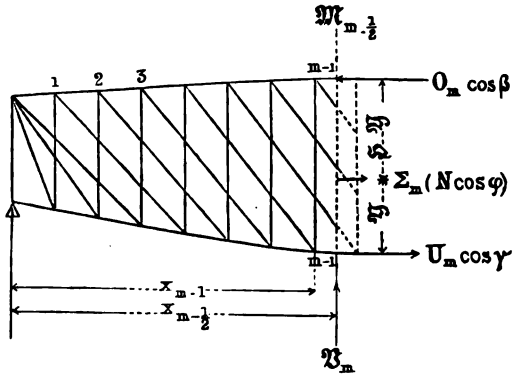
Fig. 148.



On fera une section verticale passant par les articulations supérieures ou inférieures, laquelle rencontre (exactement ou à-peu-près) le point de croisement de deux autres barres; ne tenant pas compte des barres qui se croisent, et prenant pour point de rotation l'articulation supérieure ou l'articulation inférieure rencontrée par cette section, on obtient, en faisant alternativement des coupes successives aux articulations supérieures et aux inférieures:

$$O_m \cos\beta \text{ ou bien } U_m \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \; . \; . \quad 199)$$

Fig. 149.



C) pour un *treillis multiple, non-symétrique:*

On fera une section au milieu du panneau (m — 1) m et puisque, d'après le N°. **139**, toutes les forces dans les barres sont

connues, on suppose qu'on ait calculé la résultante des composantes horizontales de toutes les barres rencontrées par la section, somme que nous indiquerons par Σ_m (N cos φ); $\mathfrak{Y}$ indique la distance verticale de cette résultante au centre de gravité de la nervure inférieure, ensorte que $\mathfrak{H} - \mathfrak{Y}$ sera la distance de la résultante au centre de gravité de la nervure supérieure.

On obtient donc:

$$O_m \cos \beta = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \pm \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \Sigma_m (N \cos \varphi) \quad 200)$$

et

$$U_m \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \mp \frac{\mathfrak{H}_{m-1/2} - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \Sigma_m (N \cos \varphi) \quad 201)$$

Il ne peut s'élever aucun doute sur le double signe du second membre des équations 200) et 201), puisque toutes les forces dans les barres sont supposées connues.

$\mathfrak{Y}$ est à-peu-près égal à $^1/_2 \mathfrak{H}$, sauf pour les panneaux extrêmes, où les directions des barres sont notablement différentes; nous ne simplifierons pas les formules 200) et 201), puisqu'il nous faudrait établir des formules spéciales pour les panneaux extrêmes.

141. Dans les fig. 147 et 148, les barres des panneaux extrêmes sont parallèles à celles des autres treillis, d'où il résulte que chacun des systèmes du treillis est incomplet aux extrémités, et que, par exemple, dans la fig. 148, les armatures verticales extrêmes ont à résister à la flexion par suite des différences des composantes horizontales des forces de barres; le même cas a aussi lieu pour la fig. 150, si les forces verticales des deux côtés de l'appui intermédiaire ont des valeurs différentes; dans ce dernier cas, l'armature verticale extrême est soumise à un effort très-grand, puisqu'elle doit en outre supporter une grande partie de la réaction sur l'appui.

Fig. 150.

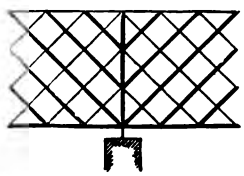


Fig. 151.

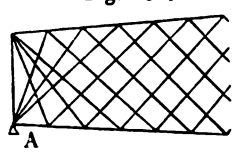
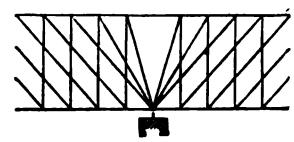


Fig. 152.



On peut décharger notablement les armatures verticales extrêmes et surtout diminuer leur tendance à fléchir, en employant

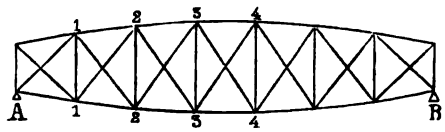
la construction indiquée par la fig. 151, comme cela a eu lieu pour une poutre non-symétrique dans la fig. 149.

Tandis que dans la fig. 151, l'armature verticale extrême doit transmettre la moitié de la pression sur l'appui, la fig. 152 montre une construction où une armature verticale extrême n'est nullement nécessaire, si les articulations inférieures sont seules chargées.

142. Nous nommons *treillis combinés* ceux qui sont munis de verticales comme dans le treillis non-symétrique, mais qui ont encore, dans chacun des panneaux, des diagonales principales de *direction opposée;* on peut considérer une telle construction comme un treillis double non-symétrique, dans lequel les deux systèmes ont des diagonales de direction opposée, comme le représentent les fig. 153 et 154.

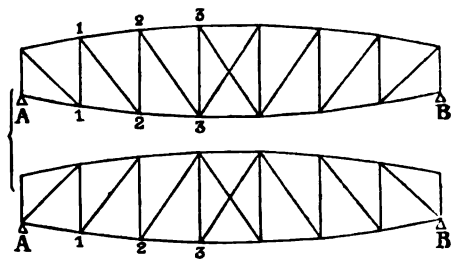
Un doute s'élève immédiatement, c'est celui de savoir quelle partie de la charge est supportée par chacun des deux systèmes, puisque toutes les articulations sont communes aux deux systèmes.

Fig. 153.



On pourra considérer ce cas comme étant résolu le plus exactement possible, si l'on suit avec attention le changement de forme de tout le treillis en ayant égard à toutes les dimensions des sections, et par là on déterminera la partie de la charge totale que chacun des deux systèmes doit supporter, ce qui, en général, sera très-difficile.

Fig. 154.



On peut néanmoins admettre, si les deux nervures sont également chargées et de même forme, et que les deux barres soient

construites de manière à pouvoir surtout bien résister à la compression — que, dans le même panneau, les deux barres ont à supporter des forces égales; il résulterait de ces hypothèses, que les verticales n'auraient aucune charge à supporter et devraient recevoir une faible dimension dans la construction.

En poursuivant notre raisonnement, nous trouvons que les dimensions trop fortes des verticales agissent d'une manière fâcheuse sur l'action uniforme des deux systèmes de barres, puisqu'une partie des forces du treillis serait supportée par les verticales qui s'opposent à un changement de forme de toute la poutre. — Lorsque les deux systèmes seront de dimensions différentes, les verticales auront une action d'une importance beaucoup plus grande.

Nous avons déjà fait remarquer ci-dessus, pour les contre-fiches, que celles qui sont construites faiblement, n'agissent pas lorsqu'elles doivent transmettre une compression; la force qui ne peut être supportée par cette faible contre-fiche est immédiatement transmise dans les verticales construites pour résister à la pression, tandis que la contre-fiche ne conserve en pression que la faible quantité qu'elle peut supporter sans se ployer. — Il en est de même, lorsque les barres d'un treillis combiné ont des dimensions inégales. Les barres doivent se prêter à des allongements ou à des rétrécissements inégaux sous l'action de forces égales, et comme la construction géométrique s'y oppose, il faut que les verticales entrent en action tandis que les barres sont soumises à des efforts inégaux.

La portion des forces que les barres auront à supporter dépendra des dimensions des verticales; si pourtant l'on suppose que les verticales ne soient ni trop faibles ni décidément trop fortes, on obtiendra le mode d'action des deux sortes de barres en calculant le degré de résistance de ces dernières; si l'on nomme

N_m et T_m les forces dans les barres d'un même treillis, à gauche du point m,

ω_n la section de la barre N_m,

ω_t la section de la barre T_m,

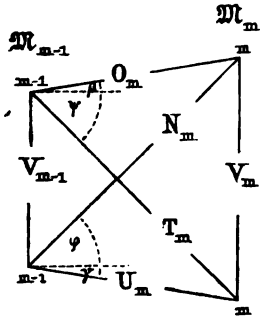
si N_m est soumise à la *traction*, on peut prendre comme rapport des forces N et T:

$$\frac{N_m}{\omega_n} = \frac{T_m}{\omega_t}\left(1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 202)$$

et si N_m est soumise à la *compression:*

$$\frac{T_m}{\omega_t} = \frac{N_m}{\omega_n}\left(1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 203)$$

Fig. 155.



143. Dans le développement des *formules* pour les *treillis combinés*, nous nous servirons des notations employées pour des treillis non-symétriques dans le N°. **135**, et reproduites dans la fig. 155.

Faisons une coupe immédiatement à gauche de la verticale m et supposons une rotation autour de l'articulation inférieure et ensuite autour de l'articulation supérieure, nous obtiendrons:

$$O_m \cos\beta + N_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 204)$$

$$U_m \cos\gamma + T_m \cos\psi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205)$$

faisant une coupe immédiatement à droite de la verticale m — 1 et admettant une rotation autour de l'articulation inférieure m — 1, nous aurons:

$$O_m \cos\gamma + T_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 206)$$

Les équations 204)—206) renferment 4 inconnues O, U, T et N, qui ne pourront être déterminées que lorsqu'on aura donné une autre condition d'équilibre sur le rapport existant entre ces valeurs, par exemple entre deux d'entre elles.

Cette quatrième équation est fournie par les équations 202) ou 203) du N°. **143**, lesquelles seront plus exactes lorsque les verticales ne seront ni trop fortes ni trop faibles — ou ce qui vaut mieux encore, si elles ont une section conforme aux forces auxquelles elles doivent résister.

On obtiendra ces forces dans les *verticales* en écrivant les conditions d'équilibre pour une des articulations; il faut auparavant déterminer les forces dans les nervures et dans les barres.

§ 16.

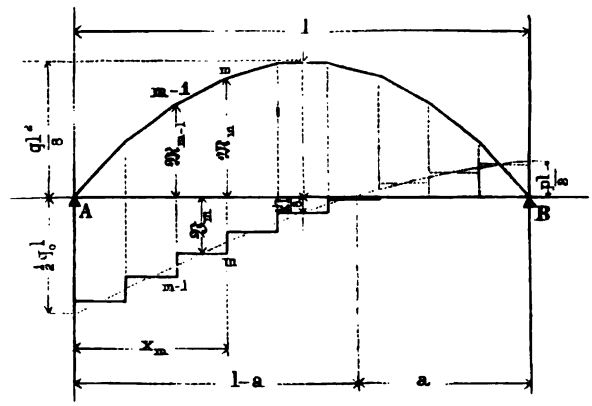
Poutres en treillis, à nervures droites et horizontales.

144. Pour le cas où les *nervures sont droites et horizontales*, les angles des nervures avec l'horizon sont nuls et les formules

se simplifient; les termes contenant $\mathfrak{M}$ disparaissent dans les équations 183), 184), 189) à 193), ainsi que dans les équations 195)—197); *les forces qui agissent dans les barres* dépendent seulement de l'effort tranchant $\mathfrak{B}$.

Pour tout système simple, comme pour tout système multiple et symétrique, les *forces qui agissent dans les nervures* ne dépendent que de la valeur max $\mathfrak{M}$ [voir les équations 180), 181), 185), 186), 198) et 199)]; la détermination des max $\mathfrak{M}$ et des max $\mathfrak{B}$ qui fournissent les forces maxima agissant dans les nervures et dans les barres, se fera commodément à l'aide de la fig. 156, suffisante pour les systèmes ci-dessus mentionnés.

Fig. 156.



(La fig. 156 se modifie un peu pour une charge différente des articulations supérieures et inférieures, à moins qu'on ne puisse considérer la charge totale comme étant concentrée aux articulations d'une des nervures; cette modification est traitée dans le N°. **130** et représentée dans la fig. 135).

Pour un système multiple, non-symétrique, la force qui agit dans les nervures est aussi dépendante de $\mathfrak{B}$, ensorte qu'il faudra considérer les valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$; toutefois, puisque les forces qui agissent dans les nervures sont données par la charge uniformément répartie sur toute la longueur du pont, les valeurs simultanées de $\mathfrak{B}$ se détermineront assez facilement (voir fig. 129).

Dans la fig. 156, la courbe des max $\mathfrak{M}$ correspond à celle de la fig. 129, et l'on obtiendra chaque $\mathfrak{M}$ d'après l'équation 174) dans laquelle on placera $x_1 = \frac{1}{2} - x_m$. — Afin d'ob-

tenir la courbe des max $\mathfrak{B}$, on a porté dans la fig. 156, trois valeurs de $\mathfrak{B}$, et pour la valeur $\mathfrak{B} = 0$, on trouve l'abscisse $l - a$ d'après l'équation 99). Ces quatre valeurs de $\mathfrak{B}$ suffisent pour construire la courbe max $\mathfrak{B}$.

Nous avons démontré dans le N°. **133** pour un système symétrique, et dans le N°. **134** pour un système non-symétrique, que les forces qui agissent dans des barres inclinées dans le même sens, changent de signe au point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$; dans les poutres horizontales, ce changement aura lieu au point max $\mathfrak{M}$, ou ce qui revient au même, au point $\mathfrak{B} = 0$; ce point varie de position par suite d'un changement de charge; la limite extrême, c'est-à-dire la position extrême du point $\mathfrak{B} = 0$ se détermine d'après l'équation 99); si a indique l'abscisse positive du point $\mathfrak{B} = 0$ la plus rapprochée de l'appui A, on a:

$$a = l \left\{ -\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2} \right\} \quad . \; . \; 207)$$

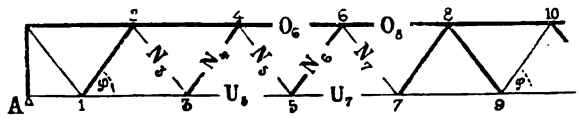
Pour des ponts de chemins de fer, le rapport $\frac{p}{k}$ sera pris dans les tables XVII, qui contiennent aussi les valeurs de k^1 pour le cas d'une charge partielle; les valeurs de k dans la formule 207) seront obtenues plus exactement à l'aide de la fig. 134. — Pour des ponts de routes, le rapport $\frac{p}{k}$ s'obtient d'après les données des N^os^. **66** et **67**.

Dans une poutre droite, chaque barre ne sera soumise qu'à une traction ou à une compression entre les appuis et le point limite a trouvé ci-dessus; entre ce dernier point et le milieu de la poutre, par suite du changement de position de la charge, chaque barre peut être soumise alternativement à une tension ou à une compression, pourvu qu'il n'existe pas de contre fiches en sens contraire (voir N°. **137**).

Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des poutres reposant librement sur deux appuis; pour des poutres continues, il faudra faire des constructions graphiques pour les diverses charges, comme le représentent les planches IV et V, où l'on a construit la courbe des $\mathfrak{B}$ qui correspond à la courbe simultanée des $\mathfrak{M}$, et où les positions limites du point $\mathfrak{B} = 0$ sont aussi indiquées.

145. Le *système simple, symétrique*, à nervures horizontales, est connu en Angleterre sous le nom de *poutres Warren.*

Fig. 157.



Si nous conservons les notations employées dans le N°. **133**, les équations 180) à 183) nous fournissent, pour des poutres à nervures horizontales, les formules simples suivantes:

a) pour les *nervures*:

$$O_m \text{ ou } U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 208)$$

et puisque Ω représente la section des nervures que nous considérons, nous aurons:

$$\text{pression moyenne } \mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega} \quad \ldots \quad 209)$$

$$\text{tension } \mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 210)$$

Remarque. Dans ces formules, nous avons supposé une poutre reposant librement sur deux appuis, dont la nervure supérieure est toujours comprimée; pour des poutres continues, l'équation 209) peut indiquer une tension et l'équation 210) une compression.

b) pour les *barres:*

$$N_m \sin \varphi = \mathfrak{B}'_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad 211)$$

et lorsque ω indiquera la section de la barre considérée, nous aurons:

$$\left.\begin{array}{l}\text{pression moyenne } \mathfrak{B}_m \\ \text{ou tension } \mathfrak{A}_m\end{array}\right\} = \frac{N_m}{\omega} \quad \ldots \quad 212)$$

On trouve la pression maximum $\mathfrak{B}$ à l'aide de la pression moyenne $\mathfrak{B}_m$, en multipliant cette dernière par le coefficient $\left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right)$, où L indique la longueur libre de la barre comprimée, ω sa section et Θ le moment d'inertie de cette section (voir l'équation 169).

146. L'un des ponts les plus connus, construit d'après le système Warren, est le *viaduc de Crumlin;* nous extrayons de la description de ce viaduc faite par Mr. Malberg dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin, année 1858, les données suivantes.

Le viaduc de Crumlin se trouve sur le chemin de fer de la ligne Newport-Abergavenny-Hereford, près de Newport (Galles du Sud) et a été commencé en 1853 d'après les projets de MM. les ingénieurs Lidell et Gordon.

Le viaduc se compose de 10 ouvertures, dont la distance mesurée entre les milieux des piles est de 150 pieds anglais; la portée des fermes est de 147 3/4 pieds soit de 45 mètres; les piles, de hauteurs très-différentes, se composent de colonnes en fonte assemblées entre elles au moyen de tirants en fer forgé et de cadres en fonte; la planche IX représente une des ouvertures; l'axe de la voie ne se trouve pas au milieu des deux poutres considérées, ensorte que la charge de la poutre extérieure n'est pas égale à celle de la poutre intérieure; dans le calcul que nous allons faire, nous avons toutefois supposé les deux poutres également chargées, (on pourrait dans le calcul tenir compte de l'inégalité de la charge, en introduisant le rapport qui existe entre les bras de levier des forces). — La nervure supérieure, soumise à la compression, présente une section de nervure creuse, comme le montre la fig. 158; la nervure inférieure et les barres soumises à la traction sont faites de fers plats, tandis que la section des barres comprimées a été construite en forme de croix, (voir fig. 159).

Fig. 158.

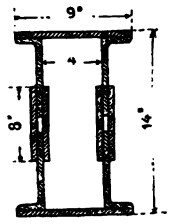
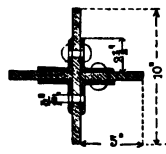
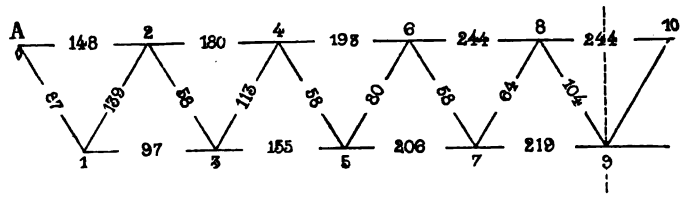


Fig. 159.



D'après les données de Mr. Malberg, nous indiquons dans la fig. 160, en centimètres carrés, les sections des nervures et des

Fig. 160.



barres; nous devons faire remarquer que, pour les fers plats, il n'était pas nécessaire de faire une déduction des logements des rivets, puisque la section aux articulations était suffisamment renforcée au moyen de feuilles de recouvrement; les sections des barres situées près du milieu du pont ont été construites plus fortes, mais, dans ces dernières, il faut faire déduction des logements des rivets.

147. Dans le N°. **65**, nous avons indiqué par l'équation 113a) comme propre poids de la construction métallique d'un pont:

$$p = Cl + F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 213)$$

où F indique le poids du tablier (par mètre) y compris celui des rails, madriers et ballast, C un coefficient particulier qui dépend de la construction de la poutre principale; si nous voulons dans la suite indiquer le poids de la construction métallique, non compris celui du matériel de voie, nous emploierons la relation

$$p' = Cl + F' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 214)$$

Le coefficient C reste le même pour les deux équations, puisque, pour un même pont — dont les poutres principales sont supposées construites entièrement en fer — p et p' ne diffèrent entre eux que du poids du tablier (voir la fin du N°. **65**).

Pour le viaduc de Crumlin, nous n'avons pas trouvé de données du poids métallique total p'; le poids de deux poutres principales supportant une voie est, d'après l'indication, de 50 tonnes pour chaque ouverture, celui du tablier correspondant, de 21 tonnes, d'où résulte:

$$F = \frac{21000}{45} = 466 \text{ soit en nombre rond } = 480 \text{ kilogr.}$$

de plus

$$p - F = C.l = \frac{50000}{45} = 1111 \text{ kilogr. soit en nombre rond } 1120 \text{ kilogr.}$$

donc

$$C = \frac{1120}{45} = 24{,}9$$

et

$$p = 24{,}9\, l + 480 = 1600 \text{ kilogr.}$$

148. Dans le calcul du viaduc de Crumlin, il a été pris comme charge accidentelle 150 tonnes pour chaque voie et pour chaque ouverture, et puisque nous exprimons par k la surcharge par mètre courant de voie, il résulte de ces données:

$$k = \frac{150000}{45} = 3333 \text{ kilogr.}$$

soit une tonne anglaise par pied anglais

d'après le numéro précédent, nous avons trouvé

$$p = 1600 \text{ kilogr.}$$

donc

$$q = p + k = = 4933 \text{ kilogr.}$$

soit en nombre rond = 5000 kilogr.;

il résulte des tables XVII et XVII^a, pour $l = 45$ mètres:

$$k^1 = {}^5/_4\, k = \text{en nombre rond } 4200 \text{ kilogr.}$$

d'où l'on déduit

$$q^1 = p + k^4 = 5800 \text{ kilogr.}$$

$$q_0 = \frac{q + q^1}{2} = \frac{5800 + 5000}{2} = 5400 \text{ kilogr.}$$

d'où résulte enfin:

pour le moment de flexion maximum au milieu de la poutre

$$\text{I. . . Max } \mathfrak{M} = \frac{ql^2}{8} = 5000\,\frac{45^2}{8} = 1265{,}6 \text{ tonnes-mètres,}$$

pour l'effort tranchant maximum de la poutre

$$\text{II. . . Max } \mathfrak{B}_0 = \frac{k^1 l}{8} = \frac{4200 \,.\, 45}{8} = 23{,}6 \text{ tonnes,}$$

pour l'effort tranchant maximum sur les appuis

$$\text{III. . . Max } \mathfrak{B} = \frac{q + q^1}{2}\,\frac{l}{2} = \frac{5400 \,.\, 45}{2} = 121{,}5 \text{ tonnes,}$$

pour l'effort tranchant minimum sur les appuis,

$$\text{IV. . . min } \mathfrak{B}_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{pl}{2} = 36{,}0 \text{ tonnes,}$$

d'après l'équation 207), pour la position extrême du point $\mathfrak{B} = 0$:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} a = l\left\{\dfrac{1600}{4200} \pm \sqrt{\dfrac{1600}{4200} + \left(\dfrac{1600}{4200}\right)^2}\right\} = 15{,}5 \text{ mètres} \\ l - a = 29{,}5 \text{ mètres.} \end{cases}$$

M max $\mathfrak{M}$ étant connu par l'équation I. ci-dessus pour le milieu du pont, les autres valeurs maxima de $\mathfrak{M}$ sont obtenues par l'emploi répété de l'équation 174) que nous rappelons ici:

$$\max \mathfrak{M}_x = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx_1^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 174)$$

dans laquelle $\mathfrak{M}_x$ indique le moment de flexion à la distance x de l'appui A; x_1 la distance de ce même moment de flexion au milieu de la poutre.

Table

$p = 1600^k$, $k = 3400^k$, $q = p + k = 5000^k$,

Index m =	1	2	3	4	5	6
						pour les
$\max \mathfrak{M}_m = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx_1^2}{2}$	mts 250	mts 500	687,5	875	1000	1125
$O_m = \frac{\max \mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}}$		29762		81845		119048
$U_m = \frac{\max \mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}}$			59524		104166	
$\mathfrak{Q}_m$		148	97	180	155	193
$\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\mathfrak{Q}}$		201		455		616
$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\mathfrak{Q}}$			614		672	
				pour les barres, la charge		
$\mathfrak{B}_m$ en tonnes:	112,0	109,2	90,2	87,4	68,4	65,6
$N_m = \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin\varphi} = \frac{\mathfrak{B}_m}{1,72}$ en kilogr.	65116	63488	52442	50814	39767	38140
ω_m	87	139	58	112	58	80
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	748		904		685	
$\mathfrak{B}_m = \frac{N_m}{\omega}$		456		540		477
				pour les barres, la charge		
$\mathfrak{B}_m$ en tonnes:	33,4	30,6	25,2	22,4	11,8	8,0
$N_m = \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin\varphi} = \frac{\mathfrak{B}_m}{1,72}$	19400	17790	14650	13023	6860	4651
ω_m	87	139	58	112	58	80
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	223		252		118	
$\mathfrak{B}_m = \frac{N_m}{\omega}$		128		116		58

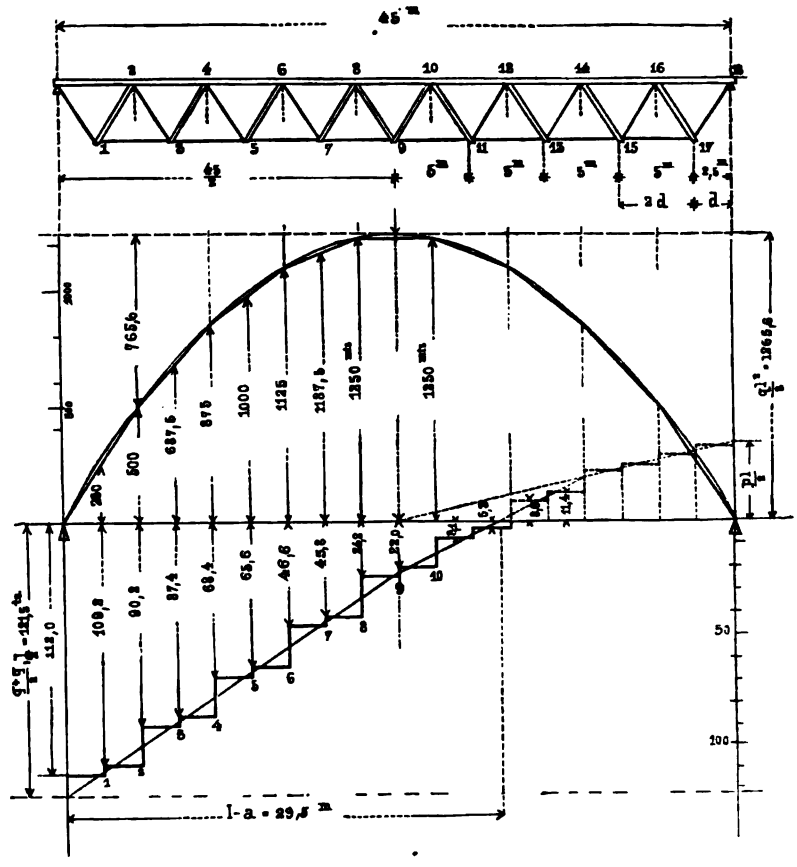
XLV.

$k^1 = 4200^k$, $q^1 = 5800^k$, $l = 45{,}0^m$ $\mathfrak{H} = 4{,}2^m$

7	8	9	10	11	12	Remarques.
nervures:						
1187,5	1250	1250	1250	1187,5	1125	Pour la détermination des tensions et des pressions dans les barres, il suffira de considérer la charge comme s'avançant d'un seul côté, par exemple de B vers A, puisque la poutre est symétrique relativement à son milieu; si nous avons aussi considéré le mouvement de A vers B, c'est afin de mieux montrer les variations des forces qui agissent dans les barres.
	141369		148801		141369	
133929		148801		148801		
206	244	219	244	219	244	
	579		610		579	
650		680		680		
s'avançant de B vers A:						
46,6	43,8	24,8	22,0	5,0	2,2	
27693	25465	14430	12790	2907	1279	
58	64	104	104	64	58	
477		138		45		
	398		123		22 *)	*) La barre N_{13} n'est construite que pour une traction; toutefois elle est suffisamment rigide, puisque la pression qui agit n'a qu'une valeur relativement très-faible.
s'avançant de A vers B:						
— 2,2	— 5,0	— 22,0	— 24,0	— 43,8	— 46,6	
— 1279	— 2907	— 12790	— 14430	— 25465	— 27693	
58	64	104	104	64	58	
	45		138		477	
22		123		398		

Les valeurs maxima de $\mathfrak{B}$ seront obtenues d'une manière graphique comme le représente la fig. 161; les valeurs indiquées par les équations II.—V. sont suffisantes pour cette construction graphique. — Il est à remarquer que les articulations supérieures sont seules chargées du poids du tablier, et, vu surtout la grande longueur des panneaux, nous emploierons la méthode indiquée dans le N°. **130.**

Fig. 161.



La moitié du poids des deux poutres principales réparti sur les articulations inférieures est, sur 5 mètres de longueur, égal à $= 5 \cdot \frac{1120}{2} = 2800$ kilogr.; aux articulations inférieures $\mathfrak{B}$ varie de cette dernière valeur dont nous avons porté à l'échelle la

moitié au-dessus, l'autre moitié au-dessous des points correspondants de la courbe max $\mathfrak{B}$.

Les efforts de tension $\mathfrak{A}$ sont plus grands que les efforts de compression $\mathfrak{B}_m$; à l'aide de ces derniers et de la formule 169), ou bien aussi approximativement par la table XIV, nous obtiendrons les efforts de compression maxima $\mathfrak{B}$; pour la nervure comprimée on a: L = 5 mètres, H = 0,23 mètre, donc $\frac{L}{\mathfrak{H}} = \frac{500}{23} = 22$, ensorte qu'on pourra prendre $\mathfrak{B} = 1{,}25\ \mathfrak{B}_m$ (pour $\frac{L}{\mathfrak{H}} = 20$ on trouve dans la table pour des sections rectangulaires creuses $\mathfrak{B} = 1{,}2\ \mathfrak{B}_m$); pour les barres comprimées, nous avons: $L = \frac{4{,}2}{0{,}68} = 4{,}9$ mètres, H = 0,25 mètre, donc $\frac{L}{\mathfrak{H}} = \frac{490}{25} = 17{,}6$ et vu leur forme en croix, nous devons prendre $\mathfrak{B} = 1{,}30\ \mathfrak{B}_m$; donc, pour les nervures, les valeurs de $\mathfrak{B}_m$ doivent être multipliées par 1,25 et pour les barres par 1,30 si l'on veut obtenir l'effort de compression maximum dans la section considérée.

148. La planche IX représente aussi la construction spéciale employée au viaduc de Crumlin pour l'assemblage des diverses pièces du treillis; les extrémités de chaque pièce, renforcées par des feuilles de recouvrement, sont traversées par de gros boulons qui doivent transmettre les charges comme cela a lieu dans les ponts en chaînes; ces boulons étant soumis à un cisaillement multiple, une section de 64 cent. carrés (diamètre $3\frac{1}{2}$" anglais) est suffisante. — Les feuilles de renfort aux extrémités de chacune des pièces du treillis ont le même but que l'*élargissement* des extrémités des pièces d'un pont en chaînes, ensorte que l'affaiblissement produit par le passage du boulon est ainsi compensé.

D'après des rapports récents, cette construction employée au viaduc de Crumlin ne s'est pas montrée favorable; les gros boulons sont devenus libres dans leurs logements et il a fallu renforcer les extrémités des barres par l'emploi de feuilles de recouvrement assemblées avec des rivets. La „Bauzeitung" du Hanovre (année 1868, page 344), d'où nous tirons cette communication, fait à cet égard la remarque que chacun des boulons principaux avait à supporter une trop grande charge locale; on y a remédié par le renfort des extrémités, comme nous venons de l'indiquer. — (Voir le N°. **52** sur le rapport qui doit exister entre le diamètre des boulons et l'épaisseur des feuilles.)

Dans la construction de ce pont, il paraît qu'il a été commis un autre faute en ce que la construction de rigidité transversale ne consistait qu'en une plate-forme en bois; aussi a-t-on dû ajouter des pièces de pont en fer, de 12" anglais de hauteur et de 28 pieds de longueur, ainsi que des poutrelles en long aussi

en fer forgé; en outre, au lieu d'un plancher en bois, il en a été construit un en fer, composé de feuilles de recouvrement assemblées, ensorte que la rigidité dans le sens transversal a été ainsi augmentée d'une manière notable. — Ensuite des renforts apportés, le passage de lourds convois ne procure qu'une flèche du pont de $^5/_8$ de pouce, tandis qu'auparavant elle avait été mesurée de $1\,^1/_2$ pouce anglais.

149. A-peu-près en même temps que le viaduc de Crumlin, on construisait aussi le *pont sur le Trent à Newark*, lequel a été décrit en 1857 par Mr. Lohse dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin.

Ce pont est biais, d'une seule ouverture de 240 pieds anglais (75,15 mètres), et présente pour le passage de deux voies, 4 poutres qui, deux-à-deux, forment un pont séparé; le tablier se trouve à la partie inférieure des poutres, dont la hauteur a permis d'établir à la partie supérieure un second contreventement, comme le montre l'esquisse ci-contre.

Fig. 162.

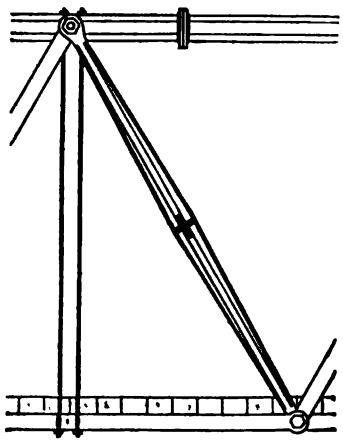
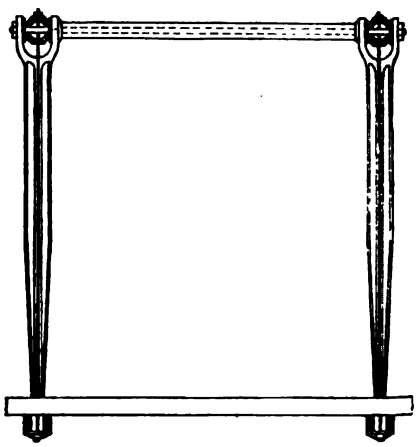


Fig. 162a.



Toutes les pièces qui doivent résister à la compression sont construites en fonte, toutes celles soumises à la traction, en fer forgé; la nervure supérieure consiste en un tube en fonte de 13 pouces de diamètre et de $1\,^1/_2$ pouce d'épaisseur sur les culées, et dont le diamètre augmente jusqu'à devenir égal à 18 pouces au milieu du pont; chacune des pièces est, à ses extrémités, exactement tournée, rabotée et assemblée *à bride* avec des boulons. — La nervure inférieure se compose de fers plats forgés, de 7—8 pouces

de largeur et de 5/8 à 3/4 pouce anglais de hauteur, leur nombre augmente vers le milieu du pont.

Le tablier ne contient pas de pièces de pont, de forts madriers en chêne sont directement placés sur la nervure inférieure; il existe toutefois un contreventement supérieur et un contreventement inférieur en ce qu'il a été construit à chaque articulation un tube en fonte transversal, placé horizontalement, qui donne passage à une tige en fer forgé, et en outre, en ce que chaque panneau est muni de diagonales horizontales en fer forgé.

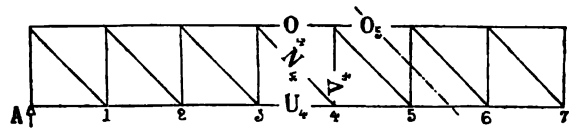
Le poids propre du pont est de 295 tonnes pour une voie et de 122,5 tonnes pour chaque poutre; si l'on prend comme longueur totale de la poutre 79 mètres, et qu'on fasse déduction du poids des portails fixes en fonte, on obtient comme poids propre de la construction métallique en le mettant sous la forme de l'équation 214):

$$p' = 500 + 40 \cdot l$$

où l indique la portée, égale à 73,15 mètres.

150. Pour un *système simple, non-symétrique*, à nervures horizontales, puisque $\mathfrak{H}$ est constant, les formules 185) à 195) se réduisent aux expressions simples suivantes:

Fig. 163.

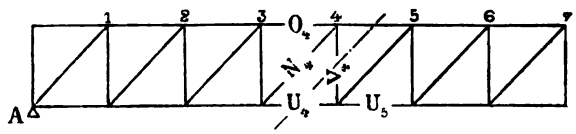


Pour les *nervures* on a:

d'après la fig. 163:

$$O_m = U_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 216)$$

Fig. 164.



ou bien, d'après la fig. 164:

$$O_{m+1} = U_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 217)$$

pour les barres inclinées, également d'après les fig. 163 et 164:

$$N_m = \frac{1}{\sin \varphi} \mathfrak{B}'_m \quad \ldots \ldots \ldots \quad 218)$$

enfin, pour les barres verticales, si P'_0 représente la force appliquée à l'articulation supérieure et P'_u celle appliquée à l'articulation inférieure,

d'après la fig. 163:

$$V_m = - \mathfrak{B}'_m - P'_u = - \mathfrak{B}'_{m+1} + P'_0 \quad \ldots \quad 219)$$

ou bien, d'après la fig. 164:

$$V_m = \mathfrak{B}'_m + P'_0 = \mathfrak{B}'_{m+1} - P'_u \quad \ldots \ldots \quad 220)$$

Lorsque les sections respectives seront connues, on obtiendra les efforts de tension et de compression dans les nervures et dans les barres d'après les équations 166)—168); si les pièces soumises à une compression sont de longueur notable, il faudra consulter l'équation 169) pour la détermination du rapport $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$.

Une barre est soumise à la traction, lorsque son extrémité inférieure est plus rapprochée du point $\mathfrak{B} = o$ que son extrémité supérieure, et elle est soumise à la compression, lorsque son extrémité supérieure est plus rapprochée du point $\mathfrak{B} = o$ que son extrémité inférieure (voir N°. **135**). L'abscisse a, qui donne la position du point $\mathfrak{B} = o$ la plus éloignée du milieu de la poutre, se trouve d'après l'équation 207); entre les abscisses a et $l - a$, les barres principales sont alternativement soumises à la pression et à la tension, et il faut employer, sur cette longueur, des contrefiches (voir N°. **137**).

151. Comme nous l'avons montré dans le N°. **144**, les forces dans les nervures, pour une poutre droite, ne dépendent que de $\mathfrak{M}$; les forces dans les barres inclinées que de $\mathfrak{B}$ et la fig. 156 représente les valeurs maxima de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$.

La grandeur des charges P_0 et P_u est surtout importante pour la détermination des forces dans les verticales. Toutefois, dans le cas indiqué par la fig. 163, il n'existe aucun doute que, pour des poutres chargées à leur partie supérieure (où tous les P_u sont de faible valeur), les barres verticales V_m n'aient à supporter la pression maximum lorsque les forces $\mathfrak{B}_m$ atteignent leur valeur négative maximum, comme le montre clairement l'équation 219). —

Quand une de ces poutres sera chargée à sa partie inférieure, il faudra rechercher si V_m n'est pas plus grand lorsque la charge s'est avancée de B jusqu'au point $m + {}^1/_2$; dans ce dernier cas, si nous posons $P_0 =$ zéro, $k_{m+1} = k_{m-1} = k$ et la longueur du panneau $= d$, nous obtiendrons:

$$V_m = -\max \mathfrak{B}'_{m+1} + P_0$$

$$V_m = \frac{kl}{8} + \left(\frac{l}{2} - x_{m+1/2}\right)\left(p + \tfrac{3}{4}k\right) \quad \ldots \quad \text{I.}$$

tandis que lorsque la charge s'est avancée de B jusqu'à m — 1/2, on a:

$$V_m = -\max \mathfrak{B}'_m - P_u$$

$$V_m = \frac{kl}{8} + \left(\frac{l}{2} - x_{m+1/2} + d\right)\left(p + \tfrac{3}{4}k\right) - \left(p + k\right)d \quad \text{II.}$$

La valeur de V_m, tirée de l'équation II., est inférieure à celle tirée de l'équation I. de la quantité

$$(p + k)\,d - (p + 3/4\,k)\,d = 1/4\,k\,d \quad \ldots \ldots \quad \text{III.}$$

La différence donnée par l'équation III. serait restée exactement la même lorsqu'une partie du propre poids de la construction aurait été supposée agissant aux articulations supérieures, puisque la somme $P_u + P_0$ aurait conservé sa même valeur $(k + p)\,d$.

Dans le cas indiqué par la fig. 164, les différences ont lieu en sens inverse, c'est-à-dire V_m est, dans le cas où les articulations inférieures sont chargées, évidemment plus grand lorsque la charge s'est avancée de B jusqu'à $x_{m+1/2}$ (voir l'équation 220); pour le cas de chargement des articulations supérieures, on aura la différence indiquée par l'équation III. ci-dessus, lorsque la charge ne s'est avancée que jusqu'au point m + 1/2.

Les dimensions des verticales eussent subi peu de modification si l'on eût pris la charge s'avançant de B jusqu'à m — 1/2, au lieu de la supposer avancée jusqu'à m + 1/2, vu la faible valeur de la différence indiquée par l'équation III.; il en est autrement pour des poutres à nervures *cintrées,* où l'augmentation de $\mathfrak{B}$ est en partie supportée par les nervures, et où P_u et P_0 procurent une augmentation de charge d'autant plus grande; la règle, qui est aussi valable pour des poutres *à nervures horizontales* d'après nos développements ci-dessus, et qui acquiert surtout une grande importance pour des poutres à *nervures cintrées,* peut s'exprimer ainsi: dans tous les treillis non-symétriques, la *force maximum se trouve dans les barres verticales,*

a) Lorsqu'on emploie des barres inclinées soumises à la traction et des verticales soumises à la compression:
   lorsque le tablier est situé à la partie supérieure et lorsque la charge est arrivée de B jusqu'à m — 1/2;
   lorsque le tablier est situé à la partie inférieure et lorsque la charge est arrivée de B jusqu'à m + 1/2.

b) Lorsqu'on emploie des barres soumises à la compression et des verticales soumises à la traction:
   lorsque le tablier est situé à la partie supérieure et lorsque la charge est arrivée de B jusqu'à m + 1/2;
   lorsque le tablier est situé à la partie inférieure et lorsque la charge est arrivée de B jusqu'à m — 1/2.

Si la charge s'avance de A vers B, tous les cas indiqués ci-dessus se produisent en sens inverse, c'est-à-dire qu'il faudra remplacer m + 1/2 par m — 1/2 et m — 1/2 par m + 1/2.

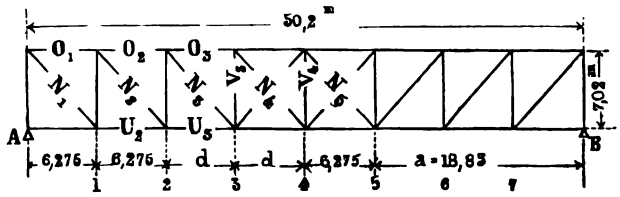
152. La direction des chemins de fer de l'Etat bavarois a fait construire dernièrement sur l'*Isar*, *à Munich*, un pont en treillis du système que nous venons de décrire.

Le pont a deux piles et 3 ouvertures, chacune de 50,2 mètres de portée, et chacune d'elles est franchie au moyen de poutres reposant librement sur les appuis.

Le pont a été construit dans les ateliers de MM. Klett et Comp. de Nuremberg, c'est Mr Gerber, Ingénieur de cet établissement, qui a bien voulu nous communiquer les notices suivantes.

Les poutres principales de ce pont, dont deux supportent une voie ont, entre les nervures, une distance géométrique (hauteur) de 7,02 mètres et une longueur de panneaux de 6,275 mètres; la longueur totale de la poutre est divisée en 8 panneaux, le tablier est situé immédiatement au-dessus de la nervure inférieure de manière à permettre un second contreventement supérieur.

Fig. 165.



Les nervures se composent de deux parties, séparées par un intervalle de 28 millimètres; la fig. 166 représente, à gauche, la

Fig. 166.

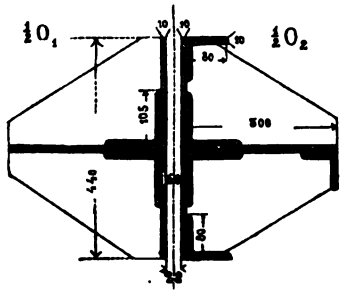
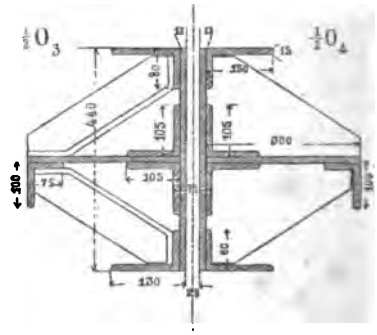


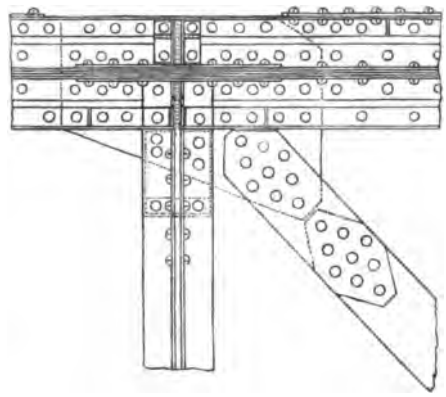
Fig. 167.



moitié de la nervure supérieure du premier panneau, et à droite, celle du second panneau; de même, la fig. 167 représente les ner-

vures du troisième et du quatrième panneau; on voit clairement par ces figures que les nervures ont été renforcées vers le milieu par l'addition de nouvelles cornières ou de feuilles dont la plupart sont assemblées sur l'articulation elle-même; à cet effet il a été employé un fort couvre-joint de forme polygonale de 28 millimètres d'épaisseur qui remplit l'intervalle entre les deux moitiés

Fig. 168.



des nervures tout en servant à l'assemblage des pièces des nervures et à celui des diagonales et des barres verticales, comme le représente la fig. 168. Lorsque la section interrompue n'est pas remplacée en entier par ce couvre-joint de forme polygonale, on a ajouté de nouveaux couvre-joints.

Fig. 169.

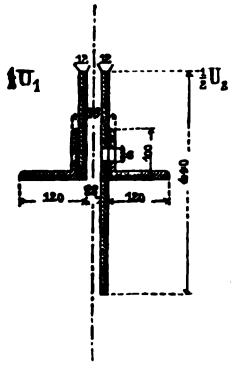
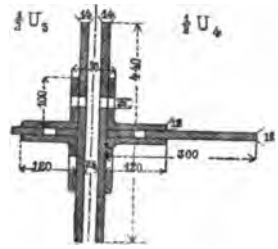


Fig. 170.

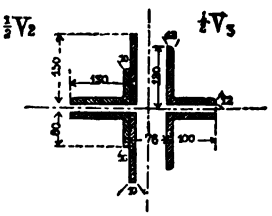


La *nervure inférieure* est construite d'une manière analogue à la nervure supérieure; la seule différence est que, pour cette ner-

vure soumise uniquement à la traction, il a été employé des fers plats relativement un peu plus forts et moins de cornières; les figures 169 et 170 représentent les sections des nervures inférieures des panneaux 1 à 4, et chaque moitié de figure indique celles d'une des nervures. En général la nervure inférieure (comme la nervure supérieure), a 44 centimètres de hauteur; dans le premier panneau, cette hauteur est réduite de moitié, ensorte que l'élévation longitudinale du pont indique déjà par sa forme que la nervure inférieure du premier panneau n'a aucune des forces du treillis à transmettre, mais qu'elle ne sert qu'à fixer réciproquement la première articulation à l'armature verticale extrême et à consolider le tablier.

Les *barres obliques* ou *diagonales* sont formées de fers plats de 26—50 centimètres de largeur, de 28—30 millimètres d'épaisseur, et sont renforcées aux deux panneaux extrêmes par l'addition d'autres feuilles assemblées avec des rivets; la fig. 168 montre la liaison des diagonales avec les nervures et les verticales.

Fig. 171.



Les *verticales* consistent en 4 cornières dont les dimensions augmentent du côté des piles et qui sont encore renforcées aux articulations 1 et 2 par des fers plats, comme le représente la fig. 171.

Les *armatures verticales extrêmes* sont formées de 12 cornières et de 2 fers plats; leurs dimensions sont telles, que non seulement elles peuvent transmettre sur les piles la composante verticale de la force dans la barre voisine, mais aussi qu'elles peuvent résister à toutes les autres forces agissant de côté, par exemple à celles des coups de vent.

Le *tablier* consiste en longrines-sous-rails de 6,275 mètres de longueur, construites en paroi pleine et reposant sur des entretoises formées d'un treillis simple et assemblées sur les verticales des poutres principales. On voit ainsi que le poids du tablier, donc aussi celui de la surcharge, ne produisent aucun effort transversal dans les pièces du treillis, mais au contraire, que toutes les charges agissent aux articulations.

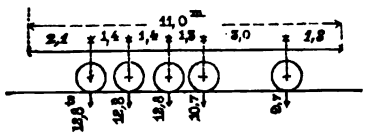
152. Les données suivantes serviront de base au *calcul des poutres principales.*

Le propre poids du pont, pour *une* voie, par mètre courant, est formé de:

deux poutres principales, ensemble . .	1786 kilogr.
contreventement	114 „
	1900 kilogr.

	Transport	1900 kilogr.	
Plate-forme:			
Entretoises	200		
Longrines-sous-rails . .	434		
Divers	34		
	668	»	
Garde-corps	66	»	
Total du poids métallique p′ =		. . .	2634 kilogr.
en outre, pour			
Traverses	272	kilogr.	
Longrines	40	»	
Madriers	160	»	
Rails	74	»	
Total pour matériel de voie p″ =		. . .	546 »
Somme totale p = p′ + p″ =		. . .	3180 kilogr.

Fig. 172.



Comme *surcharge*, on a pris 3 locomotives-tenders, dont les poids et les dimensions sont indiquées dans la fig. 172, et qui sont suivies de waggons de 5,2 mètres de longueur et d'un poids de 16 tonnes; le moment de flexion maximum au milieu de la poutre produit par la surcharge, est:

$$\max \mathfrak{M}_k = 1711{,}2 \text{ mètres-tonnes},$$

Ce moment serait obtenu par une surcharge uniformément répartie k égale à 5440 kilogr. par mètre et par voie.

Il résulte donc qu'on pourra prendre comme charge totale par mètre, pour une voie:

$$q = p + k = 3180 + 5440 = 8620 \text{ kilogr.}$$

Dans le mode de charge indiqué, celui de 3 locomotives-tenders accouplées, on peut aussi prendre pour charge parielle le poids q de la charge uniformément répartie par mètre tourant, d'où résulte:

$$k^1 = k = 5440 \text{ kilogr.}$$
$$q_0 = q = 8620 \text{ »}$$

et enfin

$$\frac{p}{k^1} = \frac{p}{k} = \frac{3180}{5440} = 0{,}585$$

D'après les charges et les poids ci-dessus indiqués, il résulte *pour chaque poutre principale*:

Moment de flexion maximum au milieu de la poutre:

$$\text{I.} \quad \max \mathfrak{M}' = {}^1/_2 \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{8620 \cdot 50{,}2^2}{2 \cdot 8} = 1357{,}85 \text{ tonnes-mètres.}$$

Effort tranchant maximum sur les culées:

$$\text{II.} \quad \max \mathfrak{B}' = {}^1/_2 \frac{ql}{2} = \frac{8620 \times 50{,}2}{2 \times 2} = 108{,}18 \text{ tonnes.}$$

Effort tranchant maximum au milieu de la poutre:

$$\text{III.} \quad \max \mathfrak{B}'_{1/2\,l} = \frac{1}{2} \frac{kl}{8} = \frac{5440 \times 50{,}2}{2 \times 2} = 17{,}0 \text{ tonnes.}$$

Effort tranchant sur les culées, résultant du poids propre de la construction:

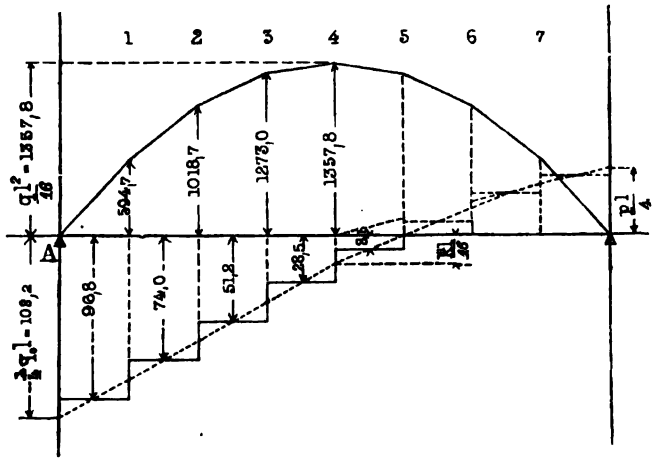
$$\text{IV.} \quad \min \mathfrak{B}'_l = {}^1/_2 \frac{ql}{2} = \frac{3180 \cdot 50{,}2}{4} = 30{,}9 \text{ tonnes.}$$

La limite du point $\mathfrak{B} = 0$ la plus rapprochée de la culée A est, d'après l'équation 207):

$$\text{V.} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \{ -0{,}585 \pm \sqrt{0{,}585 + (0{,}585)^2} \} \, 50{,}2^m = 18{,}925^m \\ l - a = 31{,}275^m \end{array} \right.$$

Dans le cas qui nous occupe, nous avons fait dans la fig. 173 une construction analogue à celle de la fig. 156, et, nous fondant

Fig. 173.



sur les propriétés bien connues de la ligne droite et de la parabole [cette dernière étant calculée d'après l'équation 174)], nous

avons fait la table suivante qui contient tous les moments de flexion $\mathfrak{M}$ et tous les efforts tranchants $\mathfrak{B}$ nécessaires au calcul des pièces du treillis:

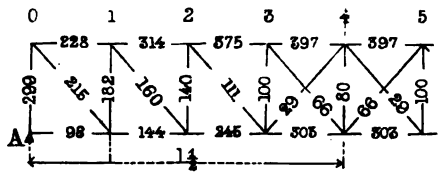
Table XLVI.

$\mathfrak{M}'_1 = 594{,}7$	mètres-tonnes,	$\mathfrak{B}'_1 = 96{,}80$	tonnes,
$\mathfrak{M}'_2 = 1018{,}7$	„	$\mathfrak{B}'_2 = 74{,}0$	„
$\mathfrak{M}'_3 = 1273{,}0$	„	$\mathfrak{B}'_3 = 51{,}4$	„
$\mathfrak{M}'_4 = 2357{,}8$	„	$\mathfrak{B}'_4 = 20{,}5$	„
		$\mathfrak{B}'_5 = 8{,}5$	„

Il nous faut encore déterminer les charges aux articulations. — Les articulations supérieures ne sont chargées, sur la longueur d'un panneau, que de la moitié du poids des poutres principales, représenté par $1900 \cdot 6{,}275 = 11922$ kilogr., ensorte que $P_0 = 5961$; $P'_0 = 2980$ kilogr; les articulations inférieures ont en outre à supporter le poids du tablier qui est de $1280 \cdot 6{,}275 = 8032$ kilogr. sur la longueur d'un panneau, ensorte qu'on a min $P_u = 14000$ kilogr., min $P'_u = 7000$ kilogr.; à ces charges vient s'ajouter celle de la surcharge, qui, pour l'articulation m et une charge de B jusqu'à $(m - 1/2)$, est donnée par la valeur kd; pour le cas présent, nous avons:

$$P'_u = 7000 + 17068 = 24068 \text{ kilogr.}$$

Fig. 174.



Les sections des diverses parties du treillis sont indiquées dans la fig. 174; il a été fait déduction des logements des rivets pour les pièces soumises à la traction, ce qui n'a pas eu lieu pour celles soumises à la compression, surtout parce que la pression moyenne est notablement plus faible que la pression dans les fibres extérieures vu la longueur relativement grande des pièces comprimées.

Le rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ a été calculé d'après la formule 169)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 169)$$

et on a pris K = 0,0001, tandis que nous avons indiqué dans la table XI, pour le fer forgé, K = 0,00008; d'après la formule ci-dessus (en prenant K = 0,0001), on obtient les valeurs indiquées dans la table XLVII.

Table XLVII.

Partie des nervures	O_1	O_2	O_4	O_6
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,54	1,34	1,26	1,24
Verticales	V_1	V_2	V_3	V_4
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,56	1,80	2,0	2,6

Les données nécessaires pour le calcul étant connues, on calculera, d'après les équations 215)—220), les forces O, U, N et V qui agissent dans le treillis, en employant les valeurs de $\mathfrak{M}'$ et de $\mathfrak{B}'$ indiquées dans la table XLVI, et l'on obtient ainsi, d'après les équations 166)—168), pour chaque partie, la tension maximum $\mathfrak{A}$ ou la compression maximum $\mathfrak{B}$ en employant les rapports $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ tirés de la table XLVII.

Le table XLVIII renferme tous les résultats du calcul.

D'après cette table nous voyons que les tensions et que les pressions maxima dans les nervures, ainsi que dans les diagonales (barres obliques), se rapprochent d'un effort de tension de 600 kilogr. par cent. carré.

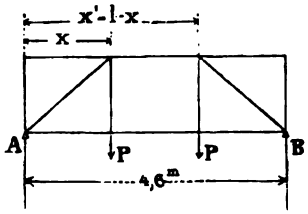
153. Les *entretoises* sont composées d'un treillis, dont les panneaux extrêmes sont formés de parois pleines renforcées par des cornières rivées diagonalement; la nervure inférieure de ces entretoises est composée de quatre cornières qui servent en même temps à rendre le contreventement plus rigide; après déduction des logements des rivets, la section est de 70 cent. carrés; la nervure supérieure se compose de deux cornières et d'un fer plat, ensemble de 74 cent. carrés sans déduction de rivets.

Table XLVIII.

$p = 3180^k$, $k = 5440$, $l = 50{,}2$, $\mathfrak{H} = 7{,}02_m$, $\sin\varphi = 0{,}745$

Index m =	1	2	3	4	5
max $\mathfrak{M}'_m$	594,7 mts	1018,7	1273,0	1357,8	1273,0
$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}}$	84,86 ts	145,52	181,86	193,98	181,86
$\mathfrak{Q}$ en cent. carrés	228	314	375	397	375
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,54	1,30	1,26	1,24	1,26
$\mathfrak{B} = \frac{O_m}{\mathfrak{Q}} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	573k	602	611	606	611
$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}}$		84,86 ts	145,32	181,86	145,52
$\mathfrak{Q}$ en cent. carrés		144	245	303	245
$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\mathfrak{Q}}$		589	594	600	594
$\mathfrak{B}'_m$	96,8 ts	74,0	51,2	28,5	8,0
$N_m = \mathfrak{B}'_m \frac{1}{\sin\varphi}$	130,0 ts	99,36	68,64	38,2	10,74
ω_m en cent. carrés	215	160	111	66	29
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	605k	620	616	579	370
max V_m = max $\mathfrak{B}'_{m+1}$ + P'_0	74,0 + 3,0 = 77,0 ts	51,2 + 3,0 = 54,2	28,5 + 3,0 = 31,5	8,0 + 3,0 = 11,0	
ω_m en cent. carrés	182	140	100	80	
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,56	1,80	2,00	2,60	
$\mathfrak{B} = \max V_m \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	660k	697	630	378	

Fig. 175.



Dans le calcul des entretoises, il faut déterminer d'abord le poids P qu'on peut supposer agissant sur chacun des points chargés (soutiens verticaux); ce poids P se compose du poids propre de la construction P, et de celui de la surcharge $P_{,,}$.

Le propre poids, par mètre courant, est:

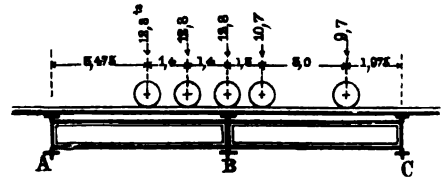
Entretoises	200
Longrines-sous-rails . .	434
Tablier	546
total	1180 kilogr.

donc pour une distance d'entretoise de 6,275 mètres:

$2 \cdot P_{,} = 1180 \cdot 6{,}275 = 7404$ kilogr. et $P_{,} = 3702$ kilogr.

La position la plus défavorable de la surcharge est repré-

Fig. 176.



sentée par la fig. 176; d'après la loi du levier, la pression sur l'entretoise du milieu B est:

$$B = 12{,}8\frac{3{,}475 + 4{,}875}{6{,}275} + 12{,}8 + 10{,}7\frac{4{,}975}{6{,}275} + 9{,}7\frac{1{,}975}{6{,}275} = 41{,}4 \text{ ts.}$$

d'où résulte $P_{,,} = \frac{B}{2} = 20{,}7$ tonnes, et enfin

$$P = P_{,} + P_{,,} = 3{,}7 + 20{,}7 = 24{,}4 \text{ tonnes.}$$

Par l'emploi de la loi du levier, et spécialement par les équations 170)—173), on obtient:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = P \cdot x = 24{,}4 \times 1{,}55 = 37.82 \text{ tonnes}$$

et d'après l'équation 216):

$$U_2 = O_1 = O_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{H}} = \frac{37820}{1{,}37} = 27600 \text{ kilogr.}$$

et enfin pour la nervure supérieure:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{27600}{74} = 373 \text{ kilogr.} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

et pour la nervure inférieure:

$$\mathfrak{A} = \frac{27600}{70} = 394 \text{ kilogr.} \quad \ldots \quad \text{II.}$$

Les *longrines-sous-rails* sont formées de parois pleines sur toute leur longueur, et se calculent d'après l'équation 158) lorsqu'on a obtenu max $\mathfrak{M}$ pour la surcharge maximum; le mode du calcul a déjà été indiqué en détail dans le N°. **110.**

154. Les ingénieurs des chemins de fer de l'Etat bavarois ont pris comme base, dans leur calcul, une tension fictive de 1200 kilogr. par cent. carré, qui serait produite par un poids de 1,2 fois plus grand que celui de la construction et par un poids de $2^1/_2$ à $3^1/_2$ fois plus grand que celui de la surcharge; dans le cas qui nous occupe, la surcharge a été prise $2^1/_2$ fois pour les poutres principales et $3^1/_2$ fois pour le tablier.

D'après les poids ci-dessus indiqués, nous aurons pour les poutres principales:

$$\frac{p}{q} = 0{,}37 \qquad \frac{k}{q} = 0{,}63,$$

ensorte que si $\mathfrak{A}$ indique la tension totale qui agit en réalité dans le cas d'une surcharge maximum uniformément répartie, nous aurons:

pour la tension résultant du propre poids $\mathfrak{A}_p = 0{,}37\ \mathfrak{A}$,
„ „ „ „ de la surcharge $\mathfrak{A}_k = 0{,}63\ \mathfrak{A}$.

Comme somme idéale pour les tensions dans les nervures, $\mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$, augmentées ainsi que nous venons de le dire, nous avons:

$$1{,}2 \,.\, (0{,}37\ \mathfrak{A}) + 2{,}5\ (0{,}63\ \mathfrak{A}) = 1200 \text{ kilogr.}$$

d'où résulte comme tension réelle:

$$\mathfrak{A} = \frac{1200}{2{,}0} = 600 \text{ kilogr.}$$

tension qui a donc été adoptée dans les nervures pour une charge maximum uniformément répartie.

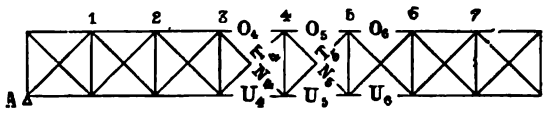
Notre mode de calcul nous a fourni (voir la table XLVIII) une tension voisine des 600 kilogr. qu'on a voulu obtenir, tandis que pour les barres verticales, les différences sont plus grandes; en général nous avons obtenu des tensions plus fortes, ce qui prouve

bien que notre méthode est suffisante pour le cas de la charge partielle la plus défavorable.

155. Dans le *système double, symétrique,* à nervures horizontales, les articulations de même numéro, (situées sur la même verticale) sont généralement reliées entre elles au moyen de faibles barres verticales qui ne servent qu'à répartir uniformément la charge sur les deux nervures; d'après le N°. **142**, cela aura lieu pour des verticales bien construites, lorsque, dans un même panneau, les barres soumises à la pression et à la tension seront à-peu-près d'égale résistance, (les sections comprimées doivent être augmentées dans le rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$).

Remarque. Lorsque les barres comprimées sont trop fortes ou qu'elles se ploient vu leur rigidité trop faible, cette construction doit être considérée comme un système combiné, et cela avec d'autant plus de raison, que les barres verticales, par suite de dimensions beaucoup trop fortes, influent sur la répartition des forces dans les diagonales.

Fig. 177.



Si nous conservons les notations employées dans le N°. **135**, les formules du N°. **140** se simplifient et nous aurons:

a) pour les nervures:

$$O_m = U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad 221)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_m \text{ (ou } \mathfrak{A}) &= \frac{O_m}{\Omega} \\ \mathfrak{A} \text{ (ou } \mathfrak{B}_m) &= \frac{U_m}{\Omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 222)$$

Pour une poutre reposant librement sur les appuis, la nervure inférieure est toujours soumise à la traction, la supérieure à la compression.

b) Pour les barres, d'après l'équation 195):

$$\left.\begin{aligned} N_m &= \mathfrak{B}'_m \frac{1}{\sin \varphi} \\ T_m &= \mathfrak{B}'_m \frac{1}{\sin \psi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 223)$$

les valeurs de N_m et T_m sont identiques puisque les angles φ et ψ sont égaux. — En nommant N les barres dont les extrémités supérieures sont dirigées du côté de l'appui de gauche A, et en ne considérant que la partie de poutre comprise entre A et le point $\mathfrak{B} = 0$, on a:

$$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin \varphi} \quad \ldots \ldots \quad 224)$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{T_m}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin \psi} \quad \ldots \ldots \quad 225)$$

Afin de déterminer la position extrême du point $\mathfrak{B} = 0$, voisin de l'appui A, nous devons supposer la charge s'avançant de B vers A jusqu'au point considéré donné par l'équation 99) ou par l'équation 207). — Pour que le panneau dans lequel se trouve le point $\mathfrak{B} = 0$ possède réellement des N soumises à la traction et des T soumis à la compression, il faut que l'articulation de droite (du côté de B) fournisse une $\mathfrak{M}$ plus grande que celle située à gauche (voir les règles du N°. **134**).

156. Comme exemple d'un treillis double, symétrique, nous prendrons le *pont sur la Brenz à Königsbronn*, construit en 1864 sur la ligne de Aalen à Heidenheim. La portée est de 19,25^m et les dimensions des autres parties de la construction sont indiquées dans la planche XI.

Les deux nervures sont formées de deux cornières et de fers plats de 24,3 cent. de largeur et de 11,4 cent. d'épaisseur; dans les panneaux où les fers plats sont assemblés, il faut faire déduction d'un des fers plats servant de couvre-joint, (voir les N^{os}. **54** et **55**); à leurs points de jonction, les cornières sont munies de couvre-joints spéciaux.

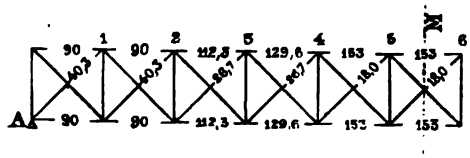
Les cornières des nervures sont munies de doublures polygonales, qui servent à l'assemblage des barres et des verticales.

Toutes les *barres diagonales* ont une section en forme de ⊤, vu que même environ la moitié des barres ascendantes sont soumises à la compression pour une charge partielle; dans les panneaux extrêmes, les fers en ⊤ sont renforcés par des fers plats assemblés à rivets; on a muni ces derniers de doublures afin d'obtenir un cisaillement double pour les rivets, — ce qui, pour les autres diagonales, a été obtenu par l'addition de feuilles accessoires plus courtes.

Les *barres verticales* sont composées de faibles cornières doubles destinées à assembler le tablier et à répartir le poids de ce dernier sur les deux nervures.

Le *tablier proprement* dit a pu être construit légèrement, la distance transversale des poutres principales n'étant que de 2,57 mètres et la distance des entretoises que de 1,74 mètre.

Fig. 178.



La fig. 178 indique, en centimètres carrés, les sections des diverses parties du treillis.

157. La surcharge peut être prise directement dans la table XVII[a], puisque cette table est fondée sur le poids des locomotives des chemins de fer wurttembergeois.

Pour une portée de 19,25 mètres, nous trouvons dans la table XVII[a]

$$p = 1450 \text{ kilogr.} \qquad k = 4660 \text{ kilogr.}$$
$$q = 6110 \text{ »} \qquad k^1 = 6600 \text{ »}$$
$$\frac{k + k^1}{2} = 5630 \text{ kilogr.}$$
$$q_0 = p + \frac{k + k^1}{2} = 7080 \text{ kilogr.}$$

et les valeurs principales s'obtiennent comme suit:

Moment de flexion maximum au milieu de la poutre:

$$\text{M max } \mathfrak{M} = \frac{q l^2}{8} = 282{,}6 \text{ mètres-tonnes} \qquad \text{I.}$$

Effort tranchant maximum sur la culée:

$$\text{M max } \mathfrak{B} = \frac{q_0 l}{2} \; 68{,}14 \text{ tonnes} \; . \; . \; . \; . \qquad \text{II.}$$

Effort tranchant maximum au milieu de la poutre:

$$\max \mathfrak{B}_{1/2 l} = \frac{k^1 l}{8} = 16{,}156 \text{ tonnes} \; . \; . \qquad \text{III.}$$

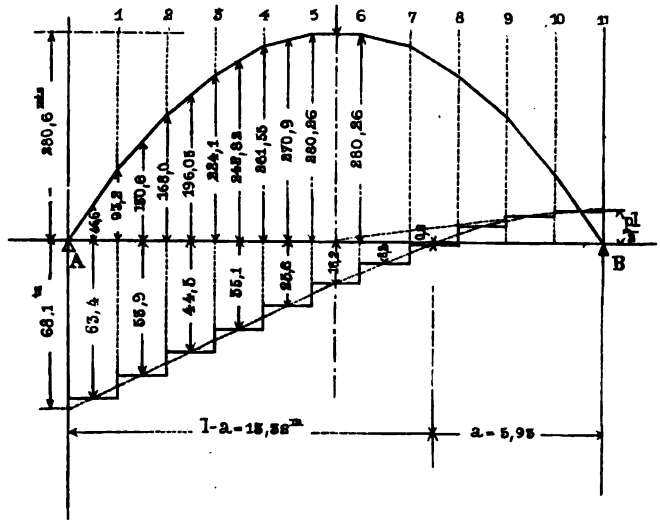
Effort tranchant minimum sur la culée:

$$\min \mathfrak{B}_l = \frac{p l}{2} = 13{,}95 \text{ tonnes} \; . \; . \; . \; . \qquad \text{IV.}$$

Position extrême du point $\mathfrak{B} = 0$, d'après l'équation 207)

$$\left.\begin{array}{l} a = l\left\{0{,}22 \pm \sqrt{0{,}22 + 0{,}22^2}\right\} = 5{,}93^{m} \\ l - l = 13{,}32^{m} \end{array}\right\} \text{V.}$$

Fig. 179.



La fig. 179 a été construite d'après la méthode indiquée dans le N°. **144**, au moyen des valeurs données ci-dessus, et nous obtenons, à l'aide de cette fig. 179, les valeurs suivantes:

a) pour le moment de flexion maximum, par l'équation 215):

$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}_3$	$\mathfrak{M}_4$	$\mathfrak{M}_5$	$\mathfrak{M}_6$
$93{,}2^{mts}$	168,0	224,1	261,55	280,3	280,3

$\mathfrak{M}_{1/2}$	$\mathfrak{M}_{2/2}$	$\mathfrak{M}_{3/2}$	$\mathfrak{M}_{7/2}$	$\mathfrak{M}_{9/2}$	$\mathfrak{M}_{11/2}$
$46{,}6^{ts}$	130,6	196,05	242,8	270,9	280,3

b) pour l'effort tranchant maximum:

$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_4$	$\mathfrak{B}_5$	$\mathfrak{B}_6$
$63{,}4_{ts}$	53,9	44,5	35,1	25,6	16,2

Les valeurs ci-dessus, combinées avec les équations 221)—225) et avec la fig. 178 qui contient les dimensions des sections de chacune des parties du treillis, nous fournissent les tensions

ou les compressions maxima dans les nervures et dans les barres, ainsi qu'elles sont contenues dans la table XLIX.

Table XLIX.

$l = 19{,}25^{m}$ $\mathfrak{H} = 1{,}8^{m}$ $\sin \varphi = 0{,}745$

Index m —	1	2	3	4	5	6
Moment de flexion $\mathfrak{M}'_{m-1/2}$	23,3 mts	65,2	98,02	121,40	135,45	140,15
$O_m = V_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}}$	12,94 ts	36,28	54,46	67,45	75,25	77,85
Section des nervures Ω en centimètres carrés.	90,0	90,0	112,3	129,6	153,0	153,0
$\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega}$ ou $\frac{U_m}{\Omega}$	144	403	482	523	492	509
Effort tranchant $\mathfrak{B}'_m$	31,7 ts	26,95	22,25	17,55	12,80	8,05
$N_m = T_m = 1/2 \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin \varphi}$	22,42 ts	19,06	15,73	12,41	9,05	5,69
Section des barres ω en centimètres carrés.	40,3	40,3	26,7	26,7	18,0	18,0
$\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}_m = \frac{N_m}{\omega}$	556	472	589	465	503	316

Les *entretoises* sont reliées à leur milieu par une armature rigide qui supporte les $^4/_{10}$ de la surcharge; le moment de flexion maximum, au point d'attache des entretoises, est donné par l'équation:

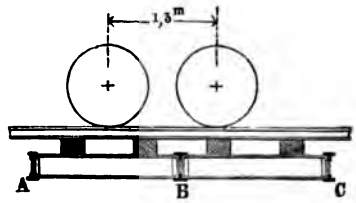
$$\max \mathfrak{M} = P \lambda \times 0{,}6$$

où P indique le poids de chacun des points chargés, λ la distance de ce point à l'appui.

La surcharge P_1, pour chacun des points chargés, est d'après l'esquisse ci-jointe (fig. 180)

$$(^3/_4 + ^1/_2)\ 6000 = 7500 \text{ kilogr.}$$

Fig. 180.



ensorte qu'on peut placer P = 7800 kilogr. en ayant égard au poids propre de la construction, — d'après la planche X, λ est égal à 0,5 mètre et l'on obtient:

$$\max \mathfrak{M} = P\lambda \,.\, 0{,}6 = 0{,}5 \times 7800 \times 0{,}6 = 2280 \text{ kilogrammètres}$$

D'après l'équation 158), la tension maximum dans les nervures est:

$$\mathfrak{A} = \frac{\max \mathfrak{M}}{\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H}\left(\Omega + {}^1/_6\ \delta\, \mathfrak{H}_0\right)}$$

mais nous avons:

$$\mathfrak{H}_0 = 26 \text{ cent.} \quad \frac{\mathfrak{H}_0}{H} = \frac{26}{29} \quad \Omega = 26{,}0 \text{ cent. carrés,} \quad \delta = 1 \text{ cent.,}$$

d'où résulte enfin:

$$\mathfrak{A} = \frac{2280}{0{,}91 \times 0{,}26 \times (26 + 4{,}33)} = 321 \text{ kilogr.}$$

La fig. 181 représente la charge la plus défavorable d'une *longrine-sous-rail*, et l'on a, d'après la loi du levier:

$$A = ({}^3/_4 + {}^1/_8)\ 6000 = 5250 \text{ kilogr.,}$$

ensorte qu'on obtient comme moment de flexion $\mathfrak{M}'$, pour l'entretoise voisine de A, — $5250 \times 0{,}43 = 2257{,}3$ kilogrammètres — Si la tension ne doit pas dépasser 500 kilogr., nous devons chercher dans la table XXIX, calculée pour une tension de 600 kilogr., une section correspondant au moins aux ${}^6/_5 \,.\, 2257 = 2708$ kilogrammètres de moment de résistance, en prenant 26 cent. pour hauteur de la longrine-sous-rail. — La fig. 104 fournit la section la plus rapprochée et présente un moment de résistance de 3088 kilogrammètres pour une poutre d'un poids de 50,7 kilogr. par mètre et de 25,7 cent. de hauteur. — La section employée en réalité correspond au poids indiqué par ce calcul.

158. L'exécution a fourni les poids suivants:

Poutre principale	15270	kilogr.	
Contreventement et construction de rigidité aux extrémités obliques	565	„	15835 kilogr.
Tablier:			
Entretoises	3162	kilogr.	
Longrines-sous-rails en fer en I	1910	„	
Poutres à parois pleines aux extrémités	600	„	
Boulons destinés à l'assemblage du tablier	253	„	5925 kilogr.
	Total		21760 kilogr.

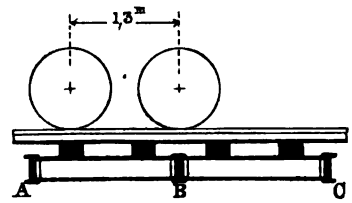
Pour 19,25 mètres de portée, le poids de la construction métallique par mètre courant est:

$$p_1 = 42{,}7\,l + 308 = 1130 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Il faut ajouter pour le matériel de voie, d'après la table XXXVI, 262 kilogr. par mètre, d'où résulte

$$p = 42{,}7\,l + 570 = 1392 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Fig. 181.



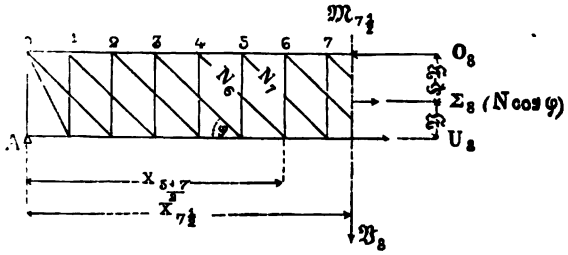
ce poids correspond bien avec les données ci-dessus, lors même que les poutres principales sont un peu fortes.

158. Le *système multiple, non-symétrique,* à nervures horizontales, est ordinairement employé dans les *constructions en fer* de façon que les diagonales ne soient soumises qu'à la traction, donc avec leurs extrémités supérieures dirigées du côté de l'appui voisin, comme le représente la fig. 182; les verticales seront surtout soumises à des efforts de compression.

En conservant les notations employées dans le N°. **135,** nous obtenons pour un système n fois multiple, d'après les développements des N°s. **139** et **140.**

a) pour une barre inclinée, dont les extrémités sont désignées par m et m', d'après l'équation 196):

Fig. 182.



$$N_m = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 226)$$

b) pour les verticales, d'après l'équation 197a):

$$V_m = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} - P'_{u_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227)$$

D'après le N°. **152**, pour le cas où la surcharge arrive de B jusqu'au milieu de (m + m'), ce ne sera pas V_m, mais $V_{m'}$ qui devra supporter le plus grand effort; pour cette dernière verticale on aura:

$$V_{m'} = \frac{1}{n} \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} + P'_{o_{m'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227a)$$

pour une même verticale, les valeurs de $V_{m'}$ sont plus grandes que celles fournies par l'équation 227) pour V_{m-2} d'une quantité égale à $\frac{1}{4}$ k d (voir N°. **151**).

Les forces N dans les barres étant déterminées par les équations précédentes, nous obtenons:

c) pour les nervures:

$$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{H}} + \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}} \cdot \Sigma_m (N \cos \varphi) \quad . \quad . \quad 228)$$

$$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{H}} - \frac{\mathfrak{H} - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}} \Sigma_m (N \cos \varphi) \quad . \quad 229)$$

Les équations 226)—229) sont applicables au cas indiqué par la fig. 182 qui représente l'extrémité de gauche d'une poutre reposant librement sur deux appuis, ou celle d'une poutre continue; pour d'autres cas, il faudra faire attention aux signes.

Les efforts maxima dans les *nervures* se produisent lorsque $\mathfrak{M}$ atteint sa plus grande valeur; mais, d'après les équations 228) et 229), il faut connaître les forces simultanées dans les barres afin

de pouvoir calculer celles dans les nervures, c'est-à-dire qu'il faut calculer la force dans les barres pour le cas d'une surcharge maximum uniformément répartie.

Pour chaque *diagonale*, max $\mathfrak{B}$ a lieu lorsque la charge du côté de B est arrivée jusqu'au milieu de la diagonale considérée; m et m′ étant les points extrêmes de cette barre, l'effort tranchant est représenté par max $\mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')}$; lorsque, par exemple, une diagonale relie les articulations (7) et (10), l'effort tranchant vertical est représenté par max $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(7+10)}$.

Le même effort tranchant sert encore à déterminer la force maximum qui agit dans les *verticales* m et m′, si l'on introduit $\mathfrak{B}$ dans l'équation 227) ou 227ª).

En exprimant le poids propre de la construction par $p = Cl + F$ (voir l'équation 213) et par d la longueur constante des panneaux, on aura pour la valeur de P_u:

$$P_u = \left\{ k_m + \frac{Cl}{2} + F \right\} d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 230)$$

et l'on obtiendra P'_u en faisant la réduction pour une des poutres principales; lorsque les panneaux ne sont pas de longueur constante, d représente la valeur moyenne des distances des panneaux situés à gauche et à droite du point qu'on considère.

159. Comme exemple d'un système non-symétrique, multiple, à poutres horizontales, nous choisirons le *pont de chemin de fer sur le Danube à Ingolstadt*, décrit dans l'organe de la société des architectes et des ingénieurs bavarois en 1869.

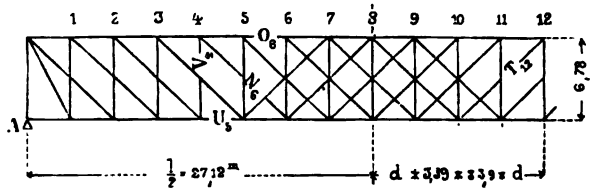
Ce pont a 3 ouvertures de 52,54 mètres de portée dans-œuvre, franchies au moyen de poutres reposant librement sur les appuis; la planche XII représente une de ces ouvertures; nous y voyons que la hauteur théorique de la poutre, c'est-à-dire la distance entre les centres de gravité des nervures, est de 6,78 mètres, hauteur qui a permis l'emploi d'un contreventement supérieur; le tablier a dû être placé à la partie inférieure, à cause des hautes eaux.

Les pièces du treillis sont construites d'une manière analogue à celles du pont sur l'Isar à Munich, décrit précédemment, et nous renvoyons aux fig. 166, 167 et 169 à 171 pour les détails des nervures et des barres verticales, lorsque la planche XII ne montre pas de changements. Ces deux ponts sont intéressants à comparer parce qu'ils ont à-peu-près la même ouverture et qu'ils ont été construits avec soin dans le même atelier de MM. Klett et Comp. à Nuremberg, et exécutés sous la direction de Mr. H. Gerber.

La différence principale de ces deux ponts est, que pour celui sur le Danube, on a fait emploi d'un système double (voir fig. 183), qui réduit de moitié la distance entre les articulations; cette réduction est favorable à la résistance à la flexion de la

nervure supérieure, mais défavorable à la résistance des barres verticales dont le poids ne peut être réduit de moitié pour un

Fig. 183.



système double, comparativement à celui d'un système simple, sans que la résistance à la flexion soit compromise.

Un effet analogue a lieu pour le poids du tablier; tandis que dans le système double du pont sur le Danube, le poids des longrines-sous-rails est assurément plus faible que celui des longrines-sous-rails de 6,275 de longueur du pont sur l'Isar, d'un autre côté, pour le pont sur le Danube, le poids des entretoises, en nombre double, ne peut pas être réduit de moitié, comparativement à celui du système simple du pont sur l'Isar.

Nous devons encore faire une remarque sur la différence principale entre les systèmes symétriques et les systèmes non-symétriques.

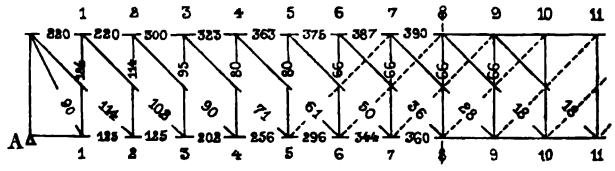
Si nous comparons le système double, symétrique, fig. 177 et les équations 221)—225), avec le système double, non-symétrique, fig. 125 et les équations 226)—229), nous trouvons que pour une même portée, une même hauteur de poutre et une même inclinaison de barres, le *nombre* et la *longueur* de toutes les *barres inclinées* sont les *mêmes* dans les deux cas; les formules 223) et 226) [cette dernière pour $n = 2$] réclament également la même résistance pour les barres N. En donnant une rigidité suffisante aux barres soumises à la compression, dans un système symétrique, on fait épargne de la majeure partie du poids des barres verticales qui peuvent aussi être remplacées dans ce système par un renfort des barres inclinées, puisque ces verticales n'auraient à supporter que la moitié du poids du tablier.

Les conditions spéciales décideront si cet avantage du système symétrique peut être conservé, contrebalancé ou même détruit par d'autres circonstances; mais on ne peut nullement attribuer à-priori un avantage théorique au système non-symétrique.

160. Passons au calcul du pont sur le Danube à Ingolstadt; les sections de chaque pièce du treillis sont indiquées dans la

fig. 184, telles qu'elles sont contenues dans le mémoire de la société des architectes et des ingénieurs bavarois.

Fig. 184.



Le poids propre du pont est, d'après ce mémoire, de 3440 kilogr., celui de la surcharge, de 4840 kilogr. par mètre et pour une voie, donc $q = p + k = 8280$ kilogr.; nous prendrons $k_1 = k$ et $q_1 = q$ en supposant des locomotives-tenders comme dans le N°. **152.** Les données précédentes nous fournissent:

Moment de flexion maximum au milieu de la poutre:

$$\text{M max } \mathfrak{M} = \frac{ql^2}{8} = \frac{8280}{8} 54{,}24^2 = 3040{,}5 \text{ mètres-tonnes} \quad . \quad \text{I.}$$

Effort tranchant maximum sur la culée:

$$\max \mathfrak{B}_l = \frac{ql}{2} = 8280 \frac{54{,}24}{2} = 224{,}4 \text{ tonnes} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Effort tranchant maximum au milieu de la poutre:

$$\max \mathfrak{B}_{1/2\,l} = \frac{kl}{8} = 4840 \,.\, \frac{54{,}24}{8} = 32{,}8 \text{ tonnes} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Effort tranchant minimum sur la culée:

$$\min \mathfrak{B}_l = \frac{pl}{2} = \frac{3440 \,.\, 54{,}24}{2} = 9{,}32 \text{ tonnes} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

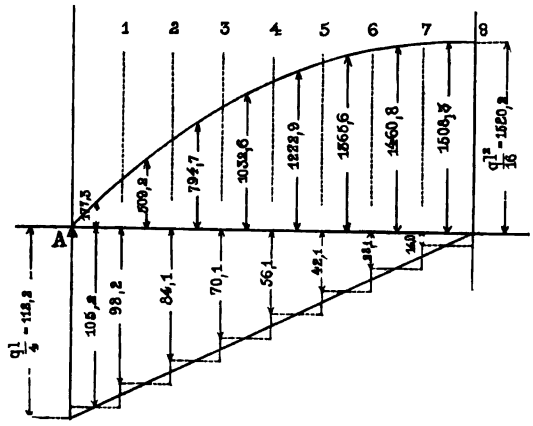
Position extrême du point $\mathfrak{B} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} a &= 54{,}24 \left\{ \frac{3440}{7850} \pm \sqrt{0{,}711 + 0{,}711^2} \right\} = 21{,}31^m \\ l - a &= 54{,}24 - 21{,}31 = 32{,}93^m \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

Nous déterminerons les *forces maxima dans les nervures*, pour le milieu de chaque panneau, à l'aide des $\mathfrak{M}$ calculés pour la charge maximum également répartie, ce qui se fera assez facilement par l'équation 174). Les équations 228) et 229) fournissent la valeur des forces simultanées dans les barres, produites par les efforts tranchants pour une surcharge maximum également répartie. Chaque $\mathfrak{M}$ maximum, pour le milieu de tous les panneaux,

et chaque $\mathfrak{B}$ simultané, pour les milieux des barres, sont indiqués dans la fig. 185.

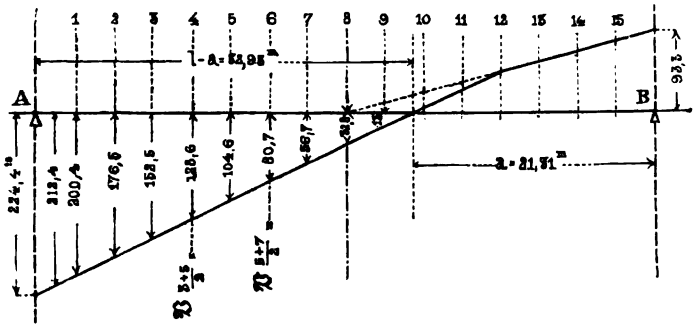
Fig. 185.



Le calcul entier est contenu dans la table L; les valeurs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$ ont été prises dans la fig. 185, les forces dans les nervures ont été obtenues par les équations 228) et 229), et enfin, en employant les formules 166) et 167), on trouve les efforts de tension et de compression maxima en introduisant l'aire des sections indiquées dans la fig. 184.

Afin d'obtenir les *forces qui agissent dans les barres*, il est nécessaire de connaître les efforts tranchants maxima $\mathfrak{B}$ qui sont indiqués dans la fig. 186, lorsque la charge s'avance de B vers A. —

Fig. 186.



On admet que max $\mathfrak{B}$ diminue progressivement depuis la culée A jusqu'au milieu de la poutre, et d'ici jusqu'à l'abscisse l — a

Table

$q = 8280^k$ $l = 54{,}24^m$

Index m =	1	2	3
$\mathfrak{B}'_{1/2\,(m+m')}$	105,2 ts	98,2	84,1
$\sin\varphi$	0,899	0,707	0,707
$N_m = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}'_{1/2\,(m+m')}\,\frac{1}{\sin\varphi}$	58,5 ts	69,4	59,5
$\cos\varphi$	0,448	0,707	0,707
$N_m \cos\varphi$	26,3 ts	49,1	42,05
$\Sigma_m\,(N\cos\varphi)$	$\frac{26{,}3}{49{,}1}$ / 75,4	$\frac{49{,}1}{42{,}05}$ / 91,15	$\frac{42{,}05}{35{,}05}$ / 77,10
$\mathfrak{y}$	4,50 m	3,27	3,25
$\mathfrak{H} - \mathfrak{y}$	2,28 m	3,51	3,53
$\mathfrak{M}'_{m\,-\,1/2}$	177,3 mts	509,2	794,7
$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m\,-\,1/2}}{\mathfrak{H}} + \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{H}}\,\Sigma_m\,(N\cos\varphi)$	76,1 ts	119,0	154,2
$\mathfrak{Q}$	220	220	300
$\mathfrak{B}_m = O_m\,\frac{1}{\mathfrak{Q}}$	336k	541	514
$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m\,-\,1/2}}{\mathfrak{H}} - \frac{\mathfrak{H}-\mathfrak{y}}{\mathfrak{H}}\,\Sigma_m\,(N\cos\varphi)$		27,9 ts	27,1
$\mathfrak{Q}$		125	125
$\mathfrak{A} = U_m\,\frac{1}{\mathfrak{Q}}$		223k	616

L.

$\mathfrak{H} = 6{,}78^{m}$.

4	5	6	7	8
70,1	56,1	42,1	28,1	14,0
0,707	0,707	0,707	0,707	0,707
49,6	39,7	29,8	19,9	9,9
0,707	0,707	0,707	0,707	0,707
35,05	28,05	21,05	14,05	7,00
35,05 28,05 63,1	28,05 21,05 49,1	21,05 14,05 35,1	14,05 7, 0 21,05	7,0
3,21	3,15	3,06	2,83	1,7
3,57	3,63	3,72	3,95	5, 1
1032,6	1222,9	1365,6	1460,8	1508,3
182,2	203,1	217,2	224,2	224,2
328	363	375	387	390
564	560	579	579	574
119,0	154,0	182,1	203,2	220,7
202	256	296	364	360
589	602	612	591	613

Table

$l = 54{,}24^m \qquad p = Cl + F = 41 \,.\, l + 1216 = 3440^k$

Index m (ou m')	1	2	3	4
$\max \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(m+m')}$ d'après fig. 185.	212,4 ts	200,4	176,5	152,5
$\sin \varphi_m$	0,899	0,707	0,707	0,707
$N_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_m} \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')}$ d'après l'équation 226).	59,50 ts	70,85	62,40	53,93
ω_m en cent. carrés.	90	114	102	90
$\mathfrak{A} = N_m \frac{1}{\omega}$	656	622	611	599
$Pu_m = \left(k = \frac{Cl}{2} + F\right) d$ d'après l'équation 230).	18105k	24300	24300	24300
$V_m = \frac{1}{2} \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} - P'u_m$ d'après l'équation 227).	53100 − 9050 44050	50200 − 12150 38050	38125 − 12150 31975	38125 − 12150 25975
$Po_{m'} = \frac{Cl}{2} d$	2827	3770	3770	3770
$V_{m'} = \frac{1}{2} \mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}(m+m')} + P'o_{m'}$	44125 1418 45532	38125 1885 40010	32100 1885 33985	26150 1885 28035
ω_m	124	114	95	80
$\mathfrak{B}_m = V_{m'} \frac{1}{\omega}$	367	351	358	350

LI.

$k = 4840^k$ $q = p + k = 8280^k$ $d = 3{,}39^m$

5	6	7	8	9	10	Remarques.
128,4	104,6	80,7	56,7	32,8	13,0	Les valeurs de $V_{m'}$ sont toujours plus grandes que celles de V_m calculées dans cette table pour une même charge, c'est-à-dire pour celle d'une surcharge qui s'étend de B jusqu'à $\frac{1}{2}(m+m')$. Les valeurs $V_{m'}$ diffèrent en plus de celles de V_m de la quantité $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}kd)$, comme l'explique le N°. 151.
0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	
45,40	37,0	28,5	20,05	16,60	4,60	
71	61	50	36	28	18	
639	606	571	557	414	255	
24300	24300	24300	24300	24300	24300	
32100 — 17150 19950	26150 — 12150 14000	20125 — 12175 8025	14175 — 12150 2025	8200 — 12150 —3940	8250 — 12150 —8890	
3770	3770	3770	3770	3770	3770	
20175 1885 22060	14175 1885 16060	8200 1885 10085	3250 1885 5135	1400 1885 3285	6110 1885 8995	
80	66	66	66	66	66	
276	242	152	76	—	—	

(position extrême du point $\mathfrak{B} = 0$), de manière à obtenir les points intermédiaires par une simple proportion arithmétique. — D'après le N°. **139**, c'est le max $\mathfrak{B}_x$, correspondant au milieu de la barre, qu'il est important de connaître pour chacune des *barres;* si nous nommons m et m′ les deux extrémités de la barre N_m, l'effort tranchant maximum, pour cette barre, sera représenté par l'expression max $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}(m+m')}$, (puisque l'abscisse du milieu est donnée par la moyenne arithmétique des abscisses des extrémités m et m′); l'équation 226) sert à déterminer la force dans la barre elle-même.

Cet effort tranchant sert aussi, à l'aide de l'équation 227), à déterminer les forces dans les verticales V_m et $V_{m'}$; pour plus de détails, on consultera les équations 227) et 227ª). — Dans la détermination des forces P_o et P_u, nous remarquerons que le poids propre du pont, pour les poutres principales y compris les constructions de rigidité, a été pris de 2224 kilogr. par mètre courant, celui du tablier de 685 kilogr., d'où résulte que celui du matériel de voie est de 531 kilogr. par mètre, puisque le poids total est de 3440 kilogr.

La table LI contient les forces dans les barres obliques et dans les verticales; les sections ont été prises dans la fig. 184; par une simple division, on obtiendra les tensions $\mathfrak{A}$ et les pressions moyennes $\mathfrak{B}_m$. — Les verticales (9) et (10) sont soumises à la traction lorsqu'une charge s'est avancée jusqu'à (8) ou (9), puisque P'_{u_m} est plus grand que l'effort tranchant $\mathfrak{B}'_m$; plus loin, c'est-à-dire dans les verticales (11)—(15), agit une compression, car au delà de l'abscisse l — a, la direction des barres est inverse et V négatif y équivaut à une compression.

Les tables L et LI montrent que la tension maximum dans les barres obliques et dans les nervures inférieures est en moyenne de 600 kilogr., tandis que la nervure supérieure est soumise à un effort de 570 kilogr.; les barres verticales sont soumises à un effort de 350 kilogr. par cent. carré.

Ces notices coïncident avec la remarque que nous avons faite dans le N°. **159**, où il est indiqué que de faibles distances des articulations sont avantageuses pour la nervure supérieure (parce que le rapport $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ ne diffère que peu de l'unité), tandis que les barres verticales se montrent désavantageuses quant à leur résistance à la compression et que leur grand nombre réclame d'autant plus de matière.

Dans le calcul du pont sur le Danube à Ingolstadt on a employé la méthode indiquée dans le N°. **154**, en adoptant une tension maximum fictive de 1200 kilogr. (en prenant 1,2 fois le poids des poutres principales et 2,5 fois celui de la surcharge); d'après la description contenue dans le mémoire de la société

des architectes et des ingénieurs bavarois, la tension maximum, pour une surcharge de 4840 kilogr. par mètre courant, doit être de 613 kilogr. par cent. carré, résultat qui coïncide parfaitement avec celui de la table L.

§ 17.

Poutres paraboliques.

161. Lorsque la forme des nervures doit être telle que, pour une surcharge maximum uniformément répartie, les forces dans les barres obliques soient nulles, ensorte que les composantes verticales des forces dans les nervures aient à supporter tout l'effort tranchant, il résulte des équations 182) ou 188):

$$\frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{\mathfrak{H}_{m+1}} = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} = \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \ldots . \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{H}_x} = R \quad . \; . \quad 231)$$

où $\mathfrak{M}_x$ indique le moment de flexion et $\mathfrak{H}_x$ la distance des centres de gravité pour une abscisse x, tandis que R est une constante, c'est-à-dire qu'il existe une même composante horizontale de la force dans les nervures sur toute la longueur de la poutre.

Il résulte évidemment de cette considération, que des poutres paraboliques reposent toujours librement sur des appuis, et par conséquent, que les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{B}$ doivent être calculés d'après les N^os^. **59—63.** Si dans l'équation 231), nous remplaçons $\mathfrak{M}_x$ par sa valeur tirée de l'équation 93^a^) ou 91), on obtient:

$$R = \frac{1}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{qx}{2}(l - x) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 232)$$

où q représente la charge totale par unité de longueur et l la portée.

Si, en outre, nous indiquons par f la distance des centres de gravité au milieu de la poutre, il résulte de l'équation 232), pour $x = {}^1/_2\, l$:

$$R = \frac{ql^2}{8f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 232^a)$$

et pour une abscisse quelconque x:

$$\mathfrak{H}_x = 4f\frac{x(l - x)}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 233)$$

Remarque. Pour des treillis, les nervures sont rectilignes entre les articulations; lorsque le nombre des panneaux est impair, f n'est pas donné immédiate-

ment; si nous nommons f_1 la hauteur des nervures à la distance $\frac{d}{2}$ du milieu de la poutre, on a:

$$\frac{q l^2}{4 f} = q \frac{l^2 - d^2}{4 f_1}$$

cette dernière valeur doit être introduite dans les équations 232a) et 233).

Si l'on porte les $\mathfrak{H}_x$ comme ordonnées des abscisses x, on obtient une parabole comme courbe des $\mathfrak{H}_x$, et c'est pour cette raison que des poutres dont les distances successives des nervures sont données par l'équation 233, sont nommées *poutres paraboliques.*

La position des nervures n'est pas fixée d'une manière absolue par les équations 231)—233); on peut toujours choisir à volonté une des deux nervures, mais l'autre doit satisfaire à l'équation 233); lorsqu'une des nervures est rectiligne, ou courbée selon une parabole à axe vertical, l'autre devra nécessairement être une parabole (ou suivant le cas, être rectiligne).

Les poutres paraboliques ont généralement l'une, quelquefois aussi les deux nervures de forme parabolique.

Les forces dans les nervures atteignent un maximum lorsque les charges maxima sont uniformément réparties; dans ce cas, pour des poutres paraboliques, la composante horizontale de toutes les forces dans les nervures est constante, de valeur R donnée par l'équation 232, d'où résulte, si l'on nomme R' et $\mathfrak{M}'$ les R et $\mathfrak{M}$ réduits pour une poutre principale:

Force maximum dans la nervure supérieure:

$$\max O_m = \frac{R^1}{\cos \beta_m} = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{1}{\cos \beta_m} \quad . \; . \quad 234)$$

Pression maximum dans la nervure supérieure:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \frac{1}{\cos \beta_m} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 235)$$

De plus, pour la force maximum dans la nervure inférieure:

$$\max U_m = \frac{R^1}{\cos \gamma_m} = \frac{1}{\cos \gamma_m} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \quad . \; . \quad 236)$$

Tension maximum dans la nervure inférieure:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \frac{1}{\cos \gamma_m} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 237)$$

Les angles β et γ des nervures, pour le cas où elles ont cintrées, augmentent vers la culée, et les forces maxima dans les nervures se produisent sur les culées; lorsque dans une poutre parabolique

l'une des nervures est rectiligne, la force dans cette nervure reste constante sur toute la longueur de la poutre si la charge est uniformément répartie.

162. La recherche précédente des forces dans les nervures est complétement indépendante du choix du système des barres; les *forces dans les barres*, pour une charge partielle, se détermineront d'après l'équation 182) pour un système simple symétrique, d'après l'équation 188) pour un système simple non-symétrique, d'après l'équation 194) pour un système multiple; les barres verticales d'un système non-symétrique se détermineront d'après les équations 192)—194a) ou 197) et 197a).

Nous pourrons donc toujours calculer les forces dans les barres par l'emploi de nos formules générales et cela pour chaque position de la surcharge.

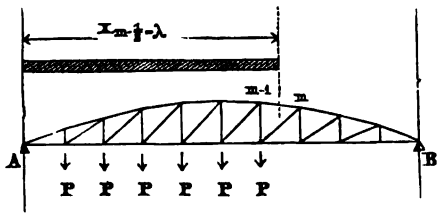
Afin de ne pas devoir prendre dans le calcul une multitude de positions de charge, il faut chercher d'une manière aussi générale que possible, quelle position la surcharge doit avoir pour obtenir les *valeurs maxima* des forces dans les barres.

On a déjà souvent démontré que les *barres inclinées* (diagonales) de *poutres paraboliques* sont soumises à des efforts maxima lorsque la charge s'étend de la culée jusqu'au point qu'on considère, les autres articulations, au-delà du point considéré, n'ayant à supporter que le propre poids de la construction; ce cas fournit aussi l'effort tranchant maximum du panneau qu'on considère.

Le mode de charge qui produit le plus grand effort dans les *barres verticales* est indiqué par les règles du N°. **151.**

La fig. 187 représente la charge sous laquelle la barre diagonale N_m, ainsi que les verticales situées à gauche où à droite, sont soumises à des efforts maxima; une charge uniformément répartie

Fig. 187.



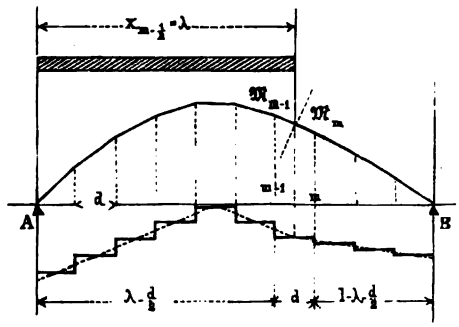
atteint ce but d'une manière exacte, lorsqu'elle est arrivée jusqu'au milieu du panneau considéré, tandis qu'on suppose la charge variable de ce panneau demi-chargé concentrée sur la dernière articulation chargée.

Puisque, pour des poutres paraboliques, la détermination des forces dans les barres nécessite la recherche de plusieurs valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$, il est très-important de pouvoir obtenir rapidement les valeurs de la surcharge qui produisent la force maximum dans les barres. — Comme dans le N°. **128**, cette recherche se fait au moyen des équations 175) et 176ª)—179ª), et afin d'être plus clairs et pour nos explications ultérieures, nous représentons, dans la fig. 188, les courbes des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$ qui correspondent à la charge considérée.

Si nous posons $x_{m-1/2} = \lambda$ et que nous nommions d la distance des panneaux, les équations 175) et 176ª)—179ª) se transforment et deviennent:

Pour le cas où une charge s'étend de A jusqu'au milieu du panneau (m — 1) m:

Fig. 188.



$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{pl}{2} + \lambda k \frac{2l-\lambda}{2l} \\ B &= \frac{pl}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 238)$$

Effort tranchant maximum, d'après l'équation 176):

$$\max \mathfrak{B}_m = A - q\lambda \quad \ldots \ldots \quad 239)$$

Remarque. Comme nous l'avons indiqué dans le N°. **127**, l'équation 239) ne donne exactement l'effort tranchant maximum que lorsqu'on suppose la charge dans le panneau demi-chargé concentrée sur la dernière articulation chargée, ce qui modifie un peu la pression sur les appuis, et les équations 238) deviennent:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{pl}{2} + \lambda k \frac{2l-\lambda}{2l} + \frac{d^2 k}{8l} \\ B &= \frac{pl}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2l} + \frac{d^2 k}{8l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 238ª)$$

Comparée avec l'équation 238), on voit que la différence est peu grande pour les efforts tranchants, mais qu'elle se reporte sur toute la longueur du pont, ensorte qu'au milieu du pont, max $\mathfrak{B}_m$ n'est plus $\frac{kl}{8}$, mais bien $\frac{kl}{8} \times \left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)$; les moments $\mathfrak{M}$ seront sensiblement modifiés par cette correction lorsque la charge s'avance dans les premiers panneaux, ce qui n'a plus lieu d'une manière aussi notable lorsque la longueur de la surcharge augmente.

Les moments de flexion simultanés, ainsi que max $\mathfrak{B}_m$, se déterminent d'après les équations 176[a]) et 179[a]):

$$\mathfrak{M}_m = A\,(\lambda - {}^1/_2\,d) - \frac{q}{2}\,(\lambda - {}^1/_2\,d)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 240)$$

$$\mathfrak{M}_{m-1} = B\,(l - \lambda - {}^1/_2\,d) - \frac{p}{2}\,(l - \lambda - {}^1/_2\,d)^2 \quad 241)$$

On peut de même déterminer pour d'autres panneaux, les valeurs simultanées de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{B}$; si, par exemple, nous avons des panneaux de même longueur:

$$\mathfrak{B}_{m-1} = A - q\,(\lambda - d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 242)$$

$$\mathfrak{M}_{m-2} = A\,(\lambda - {}^3/_2\,d) - \frac{q}{2}\,(\lambda - {}^3/_2\,d)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 243)$$

$$\mathfrak{M}_{m+1} = B\,(l - \lambda - {}^3/_2\,d) - \frac{p}{2}\,(l - \lambda - {}^3/_2\,d)^2 \quad 244)$$

Remarque. Pour une autre longueur d' du panneau contigu, il faudrait, dans les équations ci-dessus, remplacer $^3/_2\,d$ par $d' + {}^1/_2\,d$.

Les équations 238)—241) restent les mêmes lorsque la charge se meut de B vers A, seulement au lieu de A il faut placer B et vice-versâ, il en est de même pour $\mathfrak{M}_m$ et $\mathfrak{M}_{m-1}$ et pour $\mathfrak{B}_m$ et $\mathfrak{B}_{m-1}$.

163. Dans la plupart des cas, on emploie, pour les poutres *paraboliques*, un *système simple non-symétrique*, de façon que les barres inclinées ne soient soumises qu'à la traction et les barres verticales surtout à la compression; dans tous les panneaux, à part les panneaux triangulaires des extrémités, les diagonales sont doubles, de manière que l'une ou l'autre entre en fonction suivant la direction dans laquelle la charge se meut.

Pour ce système, les *forces dans les nervures* se déterminent d'après l'équation 186) ou 187), et puisque l'extrémité inférieure des diagonales soumises à la traction doit toujours être inclinée du côté de la verticale max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, on trouvera facilement celle des deux équations qui doit être employée.

Dans les poutres rigoureusement paraboliques, $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ est *constant* pour toutes les verticales dans le cas d'une charge maximum également répartie, ensorte que les équations 186) et 187) sont identiques, d'où résulte, ce qui du reste est une propriété commune à toutes les poutres paraboliques et si nous remplaçons les valeurs des équations 231) et 232):

$$O_m \cos \beta = U_m \cos \gamma = R' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 245)$$

Les forces dans les *barres inclinées* (*diagonales*) qui ne sont produites que par une charge partielle, sont toujours exprimées dans un système simple, par l'équation 246):

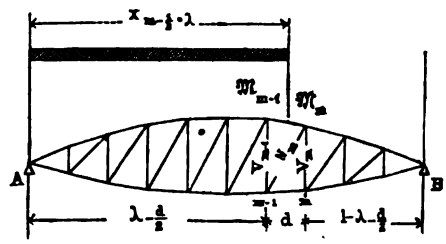
$$N_m \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 246)$$

On recherchera laquelle des deux barres du panneau (m — 1) m vient à agir pour une charge quelconque, en se fondant sur la règle: que l'extrémité inférieure de chaque barre soumise à la tension doit être inclinée du côté de la plus grande valeur de $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$.

Dans les poutres paraboliques (comme un simple calcul peut le démontrer), lorsque la charge uniformément répartie s'avance d'une manière continue, max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ a toujours lieu dans la partie chargée et — ce qui est surtout important dans la détermination des forces dans les verticales — non pas au dernier des points chargés, mais toujours plus près de l'appui qu'on considère.

L'extrémité inférieure de la barre N_m, jusqu'où la charge s'est avancée, se trouve donc toujours (les barres diagonales étant toujours soumises à la traction) du côté de la charge, comme le représente la fig. 189).

Fig. 189.



Pour pouvoir déterminer les forces dans les *verticales*, il faut connaître la direction des barres dans deux panneaux adjacents; d'après nos considérations précédentes, le point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ se trouve toujours dans la partie chargée du pont et assez éloigné de l'extrémité de la surcharge pour que, non-seulement dans le panneau (m — 1) m jusqu'où la charge s'est avancée, mais aussi dans le panneau précédent, les points inférieurs des barres (soumises à la traction) soient situées du côté de la partie chargée, ce qui a aussi lieu pour tous les panneaux de la partie non-chargée; pour les verticales, on aura donc toujours à employer l'équation 192) ou l'équation 193), la première lorsque la charge s'avance de A vers B, la seconde dans le cas contraire.

Si nous considérons le panneau (m — 1) m jusqu'au milieu duquel la charge s'est avancée, et les deux verticales V_{m-1} et V_m qui limitent ce panneau, d'après les explications du N°. **151**, lorsque le tablier est situé à la partie supérieure des poutres, ce sera toujours la dernière des verticales chargées, et lorsque le tablier est situé à la partie inférieure, toujours la première des verticales non-chargées qui seront soumises à des efforts maxima; on peut donc, pour des systèmes non-symétriques, à diagonales soumises à la traction, poser les *règles suivantes*, qui servent au calcul des forces dans les verticales:

1) Pour un tablier situé *à la partie supérieure* des poutres,

a) la charge s'étant avancée de A jusqu'à m — $^1/_2$:

$$\max V_{m-1} = \mathfrak{B}'_m - P'_{u_{m-1}} + \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} (tg\beta_m + tg\gamma_{m-1}) \quad 247)$$

b) lorsque la charge est arrivée de B jusqu'à m — $^1/_2$:

$$\max V_m = -\mathfrak{B}'_m - P'_{u_m} - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (tg\beta_m + tg\gamma_{m+1}) \quad 248)$$

2) Pour des charges appliquées *à la partie inférieure* des poutres,

a) la charge s'étant avancée de A jusqu'à m — $^1/_2$:

$$\max V_m = \mathfrak{B}'_m + P'_{o_m} + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (tg\beta_{m+1} + tg\gamma_m) \quad 249)$$

b) la charge s'étant avancée de B jusqu'à m — $^1/_2$:

$$\max V_{m-1} = -\mathfrak{B}'_m + P'_{o_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} (tg\beta_{m-1} + tg\gamma_m) \quad 250)$$

Dans les équations 247) à 250), l'origine des coordonnées est en A, la direction de la pesanteur est positive; lorsque les signes ont été bien appliqués, V positif indique une pression et V négatif une tension.

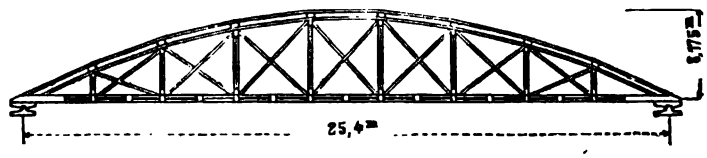
Ces formules se simplifient lorsque la nervure inférieure est rectiligne et horizontale, ce qui arrive ordinairement, car alors les termes contenant γ disparaissent. On peut du reste, lorsque la nervure inférieure est horizontale, déterminer V d'après l'équation:

$$V_m \text{ ou } V_{m-1} = N_m \sin \varphi - P'_u \quad . \; . \quad 251)$$

où l'on entend toujours la verticale située au pied de la barre N_m.

164. En Allemagne, un des premiers emplois de poutres paraboliques a eu lieu au pont sur la Brahe près de Czersk, pour le

Fig. 190.



chemin de fer de Thorn à Bromberg; la construction métallique a été projetée par Mr. J. W. Schwedler et a été publiée dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin, année 1861.

Le pont est construit pour une seule voie, de 25,4 mètres de portée (entre les points d'appui) divisée en 9 panneaux de 2,82 mètres de longueur. Le poids propre est de 1490 kilogr. par mètre et nous avons $p = F + 26{,}3\,l$, où $F = 750$ kilogr. représente le poids du tablier par mètre; la surcharge maximum, de 4470 kilogr. par mètre, a aussi été prise pour la surcharge partielle. On a adopté comme tension maximum 684 kilogr. par cent. carré.

Le calcul des *nervures* a été effectué d'après les formules 234) et 236); dans cette dernière, il faut prendre $\cos \gamma = 1$; la section de la nervure supérieure est de 118 cent. carrés sur toute sa longueur (déduction faite des logements des rivets).

Mr. Schwedler a développé une formule très-simple pour le calcul des *diagonales*, qui, si nous conservons nos notations, s'écrit:

$$\max N_m = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{kdl}{8f} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \quad 252)$$

cette équation doit rester exacte lorsqu'on prend k variant avec la longueur de la surcharge; dans le cas qui nous occupe, f est

égal à $^1/_8$ l, ensorte que la formule se simplifie encore et devient:

$$\max N_m = \frac{1}{\cos \varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 252^a)$$

D'après les équations 252) et 252^a), k étant pris constant, la force dans les diagonales augmente uniformément depuis les extrémités jusqu'au milieu du pont, où $\frac{1}{\cos \varphi}$ atteint sa valeur maximum; pour l'exemple qui nous occupe, N augmente dans le rapport de 1,09 jusqu'à 1,5. — Toutefois, si l'on prend k_m variable pour une surcharge partielle, comme nous l'avons fait dans la fig. 134, les diagonales situées entre A et le milieu du pont, lorsque la charge se meut de A vers B, sont à-peu-près également chargées; au commencement du mouvement de la surcharge, les barres en A sont soumises à des efforts même plus grands que celles du milieu; dans l'autre moitié du pont, l'effort dans les diagonales décroît d'une manière continue jusqu'à la culée A.

Dans l'exécution, toutes les diagonales ont été construites de même coupe, ce qui correspond sensiblement, d'après ce que nous venons de voir, aux propriétés des poutres paraboliques.

Pour le calcul des *verticales*, on a employé la formule 251). Il n'a pas été fait déduction de P_u, ce qui est permis, puisque l'assemblage des entretoises ne se trouve pas aux articulations elles-mêmes, mais un peu au-dessus; comme cela arrive toujours lorsque la charge agit entre les articulations, nous avons ici un chargement différent des verticales, c'est-à-dire que la partie de ces dernières située au-dessous de l'assemblage du tablier, est plus chargée que la partie supérieure. Pour la portion fortement pressée qui est ici de faible longueur, on peut prendre $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m$, tandis que pour la partie supérieure plus longue, il faut prendre $\mathfrak{B} = \left(1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}\right)\mathfrak{B}_m$; il faut encore remarquer que, d'après le N°. **151**, la force dans la partie supérieure des verticales atteint son maximum lorsque la surcharge s'est avancée jusqu'au milieu du panneau précédent; c'est alors que la première des verticales non-chargées est soumise à un effort maximum, (voir les équations 249) et 250).

165. Mr. Schwedler fait sur *l'assemblage des barres inclinées* la remarque suivante:

„La tension des diagonales, pour le passage d'un train, varie jusqu'à devenir nulle, ensorte que toujours, alternativement, l'une ou l'autre des diagonales ne supporte aucun effort. Par suite de cette variation de tension, vu la section réelle, l'allongement élastique des diagonales est de $\frac{1}{6000}$ de leur longueur, soit 0,7^{mm}; le déplacement du rectangle résultant de cet

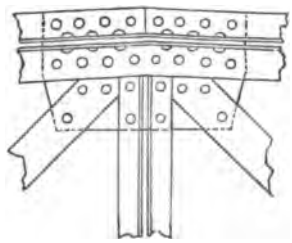
allongement produit une élévation ou un abaissement relatif du boulon d'assemblage principal d'environ 2^{mm}, où l'on a supposé que la tension dans les diagonales est au moins nulle lorsque le pont est complétement ou qu'il n'est pas du tout chargé. Ce mouvement ne peut être amoindri par une tension préalable des diagonales qui produirait un surcroît de tension maximum. Lorsque les diagonales ne sont pas assemblées assez exactement pour être soumises à une tension par le moindre changement de forme du système, le mouvement relatif sera augmenté justement de la quantité nécessaire pour que la tension commence.

„Une grande tension maximum n'est pas autant à craindre qu'une mobilité trop grande du système, aussi a-t-on mieux aimé forer les logements des rivets sous une traction des tirants de 100 à 200 kilogr. par cent. carré et y ajouter en suite les rivets."

Il faut encore remarquer, que l'assemblage des nervures avec les diagonales et les verticales a été exécuté au moyen d'un boulon de 52^{mm} de diamètre; une liaison géométrique exacte y était très-importante. Du reste l'effort maximum des diagonales, dans le cas où les barres ne sont pas du tout chargées, est exprimée par la valeur $\left(\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right) \frac{1}{\cos\varphi}$; un surcroît de tension maximum des diagonales principales ne pourrait avoir lieu que lorsqu'il existerait encore une force dans les contrefiches, c'est-à-dire, lorsque la tension primitive du système serait assez forte pour que toutes les diagonales fussent toujours soumises à une tension (voir N°. **137**).

166. Mr. Schwedler a publié dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin, année 1868, un projet de pont parabolique destiné aux travées de petite ouverture du pont sur l'Elbe près de Meissen, mais qui fut exécuté ailleurs; la portée, de 21,6 mètres, est divisée en 6 panneaux de 2,82 mètres non-compris les deux panneaux extrêmes de 2,35 mètres.

Fig. 192.



Les nervures représentées par la fig. 192 sont formées de 4 cornières, chacune de 104^{mm} de longueur d'aile, de 13^{mm} d'épaisseur et courbées en polygone; cette figure représente aussi le mode d'assemblage des nervures avec les diagonales et les verticales. Aux articulations viennent se joindre, deux-à-deux, en diagonale, des cornières situées

vis-à-vis l'une de l'autre, tandis que les deux autres n'y sont pas interrompues; la section totale des cornières a pu être ainsi remplacée par des doublures, soumises autant que possible à une tension uniforme.

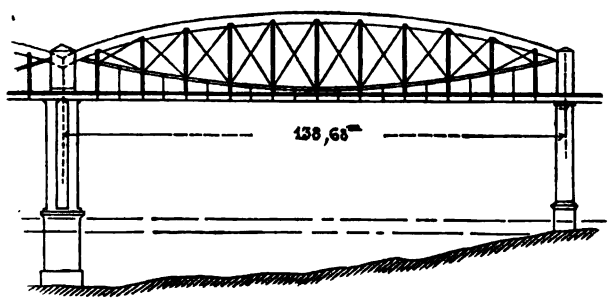
Le poids propre du pont est d'environ 19500 kilogr., dont 7000 kilogr. proviennent du poids du tablier; pour une portée de 21,6 mètres, le poids propre de la construction métallique, par mètre courant, est de

$$p' = 325 + 27\,l = 900 \text{ kilogr.}$$

La tension maximum doit être moindre que 10000 livres par pouce carré, soit à-peu-près 700 kilogr. par cent. carré. La surcharge a été prise de 5440 kilogr. par mètre courant.

167. Le pont Royal-Albert, près de Saltash, a deux grandes ouvertures franchies au moyen de poutres paraboliques de 455 pieds anglais soit de 138,68 mètres de portée; ce pont a été projeté et construit de 1856 à 1858 par Mr. Isambard Kingdom Brunel (fils du constructeur du tunnel sous la Tamise); la fig. 193 représente la vue longitudinale d'une poutre principale. La nervure supérieure, soumise à la pression, consiste en un tube en tôle de 5,1 mètres de largeur et de 3,66 mètres de hauteur. La section du tube, représentée par la fig. 194, consiste en 24 feuilles se recouvrant mutuellement et qui sont renforcées par 6 nervures longitudi-

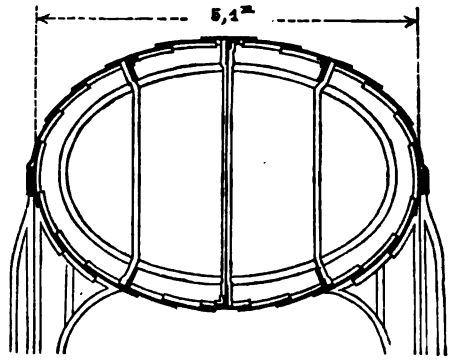
Fig. 193.



nales de 356mm de hauteur et de 13mm d'épaisseur; ces dernières sont surtout destinées à rendre le tube rigide et elles sont encore renforcées par des diaphragmes particuliers d'environ 50 cent. de hauteur, distants entre eux de 6,1 mètres. Aux extrémités, le tube a reçu une section rectangulaire afin de présenter un appui meilleur.

Les *tiges ou nervures inférieures* consistent, pour chaque voie, en 4 chaînes, placées deux à deux, l'une au-dessus de l'autre et reliées par des armatures verticales. Chacune de ces chaînes est

Fig. 194.



formée de 14 lamelles (ou chaînons) de 17,8mm de largeur et de 25,4mm d'épaisseur, alternant avec 15 lamelles de même largeur et de 24,8mm d'épaisseur; chaque chaînon a 6,096 mètres de longueur, ce qui est aussi la distance entre les articulations de la chaîne. Les *barres verticales* du treillis sont placées à la distance double de 12,192 mètres et consistent chacune en 2 fers plats et en 10 cornières formant ensemble 173 cent. carrés de section; ces barres verticales se trouvent des deux côtés de la voie, donc sur chaque côté du tube supérieur.

Les *barres diagonales*, en forme de croix, se trouvent deux à deux sur chacun des côtés de la voie, deux de ces diagonales ont donc à supporter la force dans les barres d'un panneau complet; leur section est variable; pour une largeur de 178mm elle est, sur les culées, de 45 et au milieu du pont de 55 cent. carrés. L'augmentation de la section de ces diagonales, vers le milieu du pont, correspond à l'équation 252) développée pour le pont sur la Brahe, pour une charge constante k.

Le *tablier* se compose de poutres en tôle à parois pleines de 2,54 mètres de hauteur et de 12,2 mètres de portée, attachées en partie sur les barres verticales ou suspendues aux articulations intermédiaires de la chaîne. Entre ces poutres sont placées des entretoises de 356mm de hauteur, qui supportent des madriers recouverts d'une couche de balast.

Le *poids métallique* du pont est de 912 tonnes, dont 156 appartiennent au tablier et 756 tonnes aux poutres principales, le poids métallique par mètre courant est donc

$$p' = 39{,}3\ l + 1125 = 6575 \text{ kilogr.}$$

Pour une charge de 1 tonne par pied courant anglais (3333 kilogr. par mètre), la pression dans le tube a été calculée de 660 kilogr. par cent. carré.

§ 18.

Poutres cintrées, non-paraboliques.

168. Dans les N^{os}. **131—143**, nous avons développé d'une manière générale les formules applicables à des poutres qui ne sont ni rectilignes ni paraboliques; il faudra se servir d'une des équations des numéros ci-dessus mentionnés, selon que le système sera simple ou multiple, symétrique ou non-symétrique.

Les lois spéciales qui ont été développées pour des poutres rectilignes et paraboliques sont toutefois applicables à d'autres poutres comprises *entre* ces deux formes, pourvu que ces lois soient *communes* aux poutres rectilignes et aux poutres paraboliques.

Comme loi commune, nous avons trouvé pour des poutres reposant librement sur deux appuis, que les *barres* inclinées dans chacun des panneaux travaillent au maximum lorsque la *charge s'est avancée jusqu'au milieu du panneau considéré;* dans ce cas, l'effort tranchant atteint sa valeur maximum positive ou sa valeur minimum négative (la direction de la pesanteur étant positive). — Nous renvoyons au N°. **144** pour des poutres rectilignes et au N°. **126** pour des poutres paraboliques.

La recherche des forces qui agissent dans les barres de *poutres cintrées quelconques* peut se faire à l'aide des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{V}$ trouvés dans le N°. **162** par les équations 238)—244) pour des poutres paraboliques.

D'après ces équations, principalement 242)—244), on pourra déterminer toutes les forces simultanées qui agissent dans les barres pour une surcharge quelconque s'étendant jusqu'au milieu d'un panneau quelconque, ce qui peut avoir quelque importance pour des systèmes multiples non-symétriques; en général on n'aura à employer que les équations 238)—241), puisqu'on ne considère, dans la plupart des cas, que la charge avancée jusqu'au panneau considéré.

Le N°. **151** contient les règles suivant lesquelles les *barres verticales sont soumises à un effort maximum* pour des systèmes non-symétriques; d'après les développements contenus dans ce

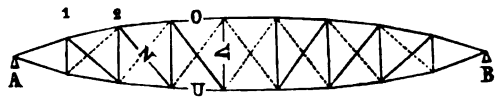
numéro, ces règles s'appliquent aussi *d'une manière générale* à des poutres droites et à des poutres cintrées quelconques.

Dans le cas où les nervures ne sont que peu cintrées, la détermination des forces dans les barres peut se faire souvent par l'emploi des formules plus simples 184), 191) ou 195); la fig. 130b fournit alors tous les $\mathfrak{M}$ et tous les $\mathfrak{B}$ nécessaires.

169. Le système de Mr. *Pauli* se rapproche beaucoup des poutres paraboliques. La forme que doit avoir la poutre de ce système est donnée par la condition que les deux nervures, sur toute leur longueur, doivent supporter la même tension ou la même pression pour une surcharge uniformément répartie.

Le système de Mr. Pauli est employé comme système non-symétrique à diagonales en fers plats; en conservant les nota-

Fig. 195.



tions du N°. **134**, nous obtenons d'après la définition ci-dessus, pour la moitié du pont située du côté A (si l'on suppose que les diagonales agissent comme le représente la fig. 195):

$$O_m = \frac{1}{\cos\beta_m}\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} = O_{m-1} = \frac{1}{\cos\beta_{m-1}}\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} = \text{une constante} \quad 253)$$

$$U_m = \frac{1}{\cos\gamma_m}\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} = U_{m+1} = \frac{1}{\cos\gamma_{m+1}}\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} = \text{une constante} \quad 254)$$

Puisque tous les O doivent être égaux, il s'en suit aussi que tous les U doivent avoir la même valeur, condition qui n'est possible que lorsque $\cos\beta = \cos\gamma_{m+1}$, $\cos\beta_{m-1} = \cos\gamma_m$; on cherche à remplir cette condition en prenant pour O_m et U_m une valeur moyenne:

$$\left.\begin{aligned} O_m &= \frac{1}{\cos\beta_m}\frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} = \text{une constante} \\ U_m &= \frac{1}{\cos\gamma_m}\frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} = \text{une constante} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 255)$$

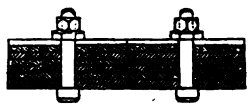
Les mêmes équations auraient été obtenues si les barres ponctuées de la fig. 195 avaient dû entrer en action et qu'on eût changé

les indices de O et de U. — Il résulte de l'équation 255) que les angles β_m et γ_m sont égaux, donc que toutes les nervures des poutres du système de Mr. Pauli sont *cintrées symétriquement*. On construit la ligne des nervures en adoptant dans l'équation 255), une valeur fixe pour la hauteur $\mathfrak{H}$ du milieu de la poutre et en calculant ensuite les angles à partir de l'appui. Généralement, dans le système de Mr. Pauli, on prend comme hauteur de la poutre le $^1/_7$ de la portée.

Ces poutres se calculent d'après le N°. **163**, exactement de la même manière que des poutres ordinaires paraboliques, car les différences assez petites dans la forme des nervures n'influent que très-peu sur les règles déjà développées. — Les règles du N°. **162** servent à déterminer chaque $\mathfrak{M}$ et chaque $\mathfrak{V}$ et nous emploierons la méthode indiquée dans les N^os^. **162** et **163** pour le calcul qui va suivre du pont sur le Main à Kitzingen.

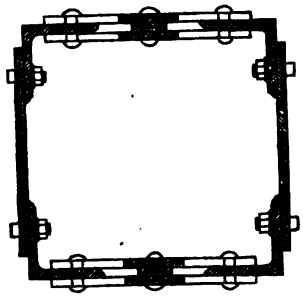
171. Dans une brochure publiée en 1859 par MM. Klett et Cie. à Nuremberg, Mr. Gerber s'exprime en ces termes sur le *mode de construction* des poutres de Mr. Pauli:

Fig. 196.



„La *nervure soumise à la tension* (fig. 196) consiste en une série de fers plats réunis par des boulons côniques et dont les joints alternatifs, suivant la grandeur de la section, sont remplacés par un fer plat continu ou par un couvre-joint spécial. — Lorsque de fortes sections sont réclamées, on place deux fers plats à côté l'un de l'autre afin de n'employer à la traction que du fer qui a été chauffé en entier, bien martelé et laminé, et pour éviter l'emploi de boulons d'une longueur trop considérable.

Fig. 197.



„Dans les constructions de dimension un peu grande, la *nervure soumise à la compression* reçoit une section de forme rectangulaire, dont les dimensions sont en rapport avec la distance des panneaux, et dans laquelle les masses sont, autant que possible, concentrées aux angles du rectangle.

Remarque. On forme actuellement les sections de manière que leur construction soit plus commode, par exemple en forme de **I**, comme cela a eu lieu pour le pont sur le Rhin à Mayence.

„Aux extrémités, la liaison des deux nervures a lieu au moyen d'un *sabot* (fig. 198 et 199) en fonte ou en fer forgé, qui pré-

Fig. 198.

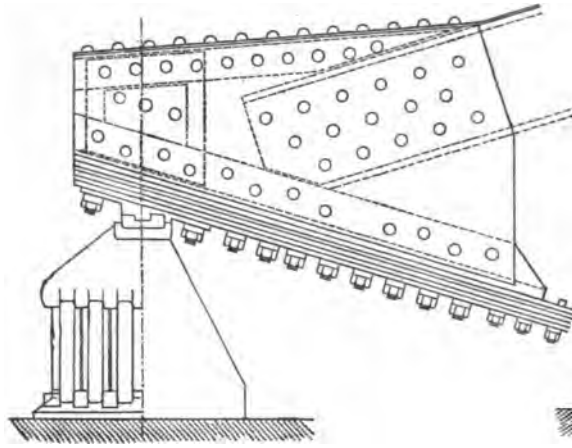
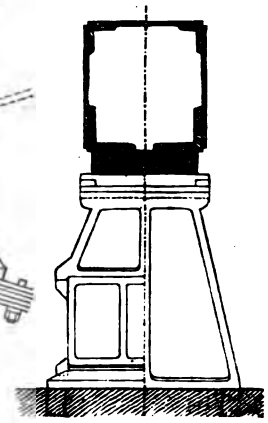


Fig. 199.



sente une surface suffisante pour la jonction des deux nervures, et une section capable de résister au cisaillement sur l'appui.

Fig. 200.

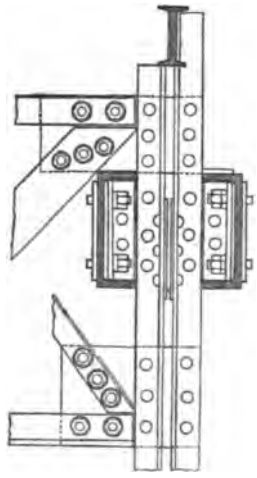
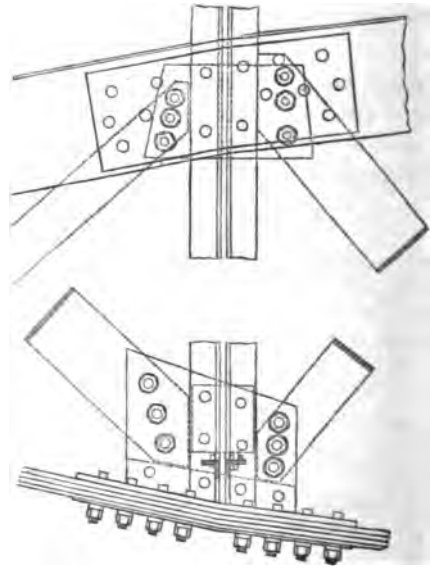


Fig. 201.



„Les *barres verticales* sont formées de cornières en forme de croix ou de **I** et assemblées à la nervure inférieure à

l'aide de boulons de section suffisante; ces barres sont reliés à la nervure supérieure de façon qu'aucun mouvement latéral ne puisse avoir lieu (fig. 200 et 201). Les poutres qui supportent le tablier sont assujetties aux barres verticales qui, suivant la position du tablier, réclament des sections plus ou moins grandes (voir la fin du N°. **169**).

„Les *diagonales* sont formées de fer plats boulonnés à leurs extrémités à des feuilles de tôle réunies convenablement aux nervures et aux barres verticales (fig. 200).

„La construction entière repose à ses extrémités sur une *surface cylindrique* de grand rayon, *en acier*, (fig. 198) laquelle rend possible la flexion élastique de la poutre sans produire une forte pression partielle sur les soutiens. Un mouvement transversal ou longitudinal de cette surface ne peut avoir lieu, vu les saillies apportées des deux côtés du soutien et qui agissent comme des adents. — Les plaques inférieures reposent sur des *sabots* en fonte (fig. 198), dont l'un est fixé à la maçonnerie de la culée, tandis que l'autre repose sur des glissières à côtés munis d'adents, qu'on fait emboiter dans d'autres dents du rouleau et de la plaque de soutien, afin d'obtenir un parallélisme convenable. — Les surfaces cylindriques des glissières sont tournées et se meuvent sur des surfaces planes rabotées. — La hauteur des glissières est choisie de manière que leur inclinaison maximum, pour des températures extrêmes, soit déterminée et à-peu-près égale pour les diverses ouvertures.“

Remarque. Actuellement, la plaque en acier située entre le soutien et le sabot, est fixée à une seconde plaque en acier au moyen d'un poinçon; cette seconde plaque est elle-même fixée au sabot, ensorte que les saillies en adents ne sont plus nécessaires. — Les glissières sont remplacées par des rouleaux. — Ces dernières dispositions sont aussi représentées dans les planches X et XII.

Mr. Gerber dit ensuite:

„Tous les assemblages principaux ont lieu au moyen de boulons côniques à têtes faibles et tournés selon un cône de $\frac{1}{100}$ de fruit, avec écrous et rondelles; les trous, percés en cylindre, sont évasés au moyen de limes côniques jusqu'à ce que le boulon coïncide jusqu'à un certain point, déterminé par l'expérience, pour être ensuite chassé par quelques coups de marteau et seulement alors l'écrou est fortement tiré afin de presser le fer. — Par ce moyen, le fer autour du logement du boulon est un peu comprimé et le boulon remplit complétement le trou. — Les rondelles sont assez fortes pour qu'aucun pas de vis ne se trouve dans le fer, mais que le trou soit complétement rempli par la partie tournée du boulon. — Après avoir vissé les écrous le plus fortement possible, on les

refoule afin qu'ils ne viennent pas à battre à faux par suite des ébranlements, ce qui du reste serait peu à craindre puisque, par la construction ci-dessus indiquée, il ne peut se produire de choc du boulon contre l'écrou. L'emploi de ces boulons côniques a premièrement eu lieu pour la construction du pont sur l'Isar à Heselohe.

Remarque. Dans les ateliers (Eisenbauanstalt) de MM. Klett et Cie. à Mayence, on emploie maintenant principalement la rivure à chaud, c'est seulement lorsque cette dernière ne peut pas être employée convenablement, que l'emploi de boulons côniques est préféré.

„La recherche de l'élasticité à la tension des divers fers employés a lieu au moyen d'une machine spéciale et tous les fers plats employés sont étirés par cette machine jusqu'à la tension de 1200 kilogr. par cent. carré, et ils sont en même temps martelés. — Les endroits mal soudés deviennent ainsi visibles et jusqu'à cette tension le fer devient plus élastique, c'est-à-dire son allongement permanent devient nul.

„La préservation du fer contre les influences atmosphériques se fait au moyen d'un lavage corrosif préalable, suivi de coups de marteau, qui ont pour but d'enlever la rouille attachée au fer; ce dernier est ensuite plongé dans une huile bouillante qui fait disparaître toute trace d'humidité et il se forme à la surface du fer une forte couche de vernis. Cette opération est préférable à celle ordinairement employée, parce que la rouille qui pourrait se trouver au-dessous du vernis se propagerait rapidement, ensorte qu'on aurait toujours des réparations à faire.

„Par un arrangement spécial, toutes les diagonales, avant leur placement, sont étirées de $\frac{1}{6000}$ de leur longueur afin que les faibles voilements qui pourraient encore exister disparaissent et que les diagonales entrent en action aussitôt que la poutre se ploie.

„Un échafaudage est nécessaire pour le montage de poutres du système de Mr. Pauli; on le place ordinairement immédiatement au-dessous de la poutre à monter, dans la travée elle-même. Lorsque cela est impossible, on peut monter la poutre en entier dans un endroit convenable, l'amener entre les piles et l'élever ensuite par la méthode employée pour les grands ponts en Angleterre."

172. Plusieurs ponts du système de Mr. Pauli, ayant la même portée, ont été construits en 1864 sur la ligne de Nuremberg à Wurzbourg; le plus important de ces ponts est celui du Main à Kitzingen.

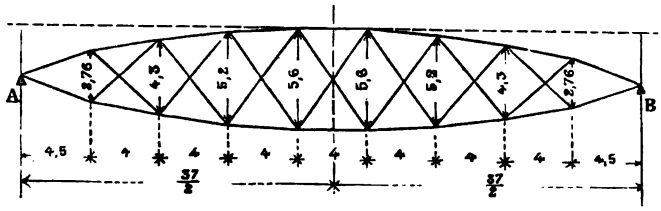
La planche XIII représente une des poutres de ce pont à 5 travées, chacune de 37 mètres de portée; c'est d'un cahier

autographié qui nous a été communiqué par Mr. l'ingénieur Gerber, que nous tirons le dessin et les renseignements suivants.

La planche XIII montre que le *tablier* est situé à la partie supérieure du pont; des entretoises en treillis simple sont assemblées aux barres verticales, distantes de 4,0 mètres; ces entretoises supportent des longrines-sous-rails, sur lesquelles la voie est assujettie.

Les dimensions générales des poutres principales sont contenues dans la fig. 203. — Les *nervures supérieures* sont formées de fers en ⌊ de 62,25 cent. carrés de section (voir fig. 200 et 201) et

Fig. 203.



d'un fer plat de 340^{mm} de largeur et de 8^{mm} d'épaisseur; les nervures ont donc ensemble une section de 151,7 cent. carrés, sans déduction pour les logements des rivets. — Toutes les parties des nervures sont assemblées aux articulations; les feuilles des nervures y sont interrompues (ce qui permet le passage des verticales), et la réunion de toutes ces pièces a lieu au moyen de couvre-joints.

Les *nervures inférieures* consistent en 4 couches de fers plats de 280^{mm} de largeur et de 13^{mm} d'épaisseur, qui, après déduction d'un logement de rivet de 20^{mm} de largeur et de 52^{mm} de hauteur, forment une section totale de 125,2 cent. carrés.

Les *diagonales* consistent aussi en fers plats, chacun de 12^{mm} d'épaisseur et dont la largeur varie entre 120 et 180^{mm}; si l'on considère les barres dont l'extrémité inférieure est dirigée du côté de A et l'extrémité supérieure du côté de B, on voit qu'elles augmentent en largeur de A vers B; ces largeurs sont, pour les panneaux de 2 à 8, successivement de 12, 12, 14, 16, 18, 18, 18 centimètres.

Chaque *verticale* est composée de 4 cornières et chaque cornière a 80^{mm} de longueur d'aile et 9^{mm} d'épaisseur, formant 13,5 et ensemble 54 cent. carrés de section. — Ces cornières sont réunies aux nervures supérieures à l'aide d'assemblages intermédiaires composés de fers plats et de cornières, tandis qu'elles reposent sur la nervure inférieure au moyen d'une courte feuille verticale, comprise entre deux autres feuilles polygonales, qui servent à l'attache des diagonales.

173. Le *poids propre* p′ de la construction, pour chaque ouverture, se compose de:

Table LII.

Pièces du pont.	Fer laminé.	Boulons, rivets et vis.	Total, fer forgé.
1. Poutres proprement dites. . .	28,60 ts	1,46 ts	30,06 ts
2. Contreventement	2,00	0,10	2,10
3. Tablier	9,02	0,54	9,56
4. Trottoirs avec garde-corps . .	1,96	0,09	2,05
Total	41,58	2,19	43,77

Si l'on considère les poids (1) et (2) comme appartenant aux poutres principales et les poids (3) et (4) comme appartenant au tablier, on obtient comme poids métallique d'un pont de 37 mètres de portée, par mètre courant de voie:

$$p' = 23{,}5 \times l + 314 = 1180 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

d'où résulte:

$$C = 23{,}5 \text{ et } F' = 314.$$

Dans le calcul, il faut encore tenir compte du tablier proprement dit, à savoir:

Pour bois et rails	520 kilogr.
Ballast	1000 „
total p″ =	1520 kilogr.

ensorte qu'on obtient comme poids total:

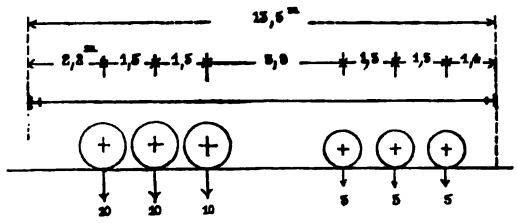
$$p = p' + p'' = 23{,}5\ l + 1834 = 2700 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

La surcharge a été supposée fournie par 3 locomotives dont les poids et les distances d'axe à axe sont indiqués dans la fig. 204,

d'où résulte un moment de flexion de 649,6 mètres-tonnes, ce qui représente une charge variable uniformément répartie de:

$$k = \frac{649{,}6 \times 8^{t}}{37^2} \text{ 3800 kilogr. par mètre . . . III.}$$

Fig. 204.



Il résulte des équations II. et III.:

$$q = p + k = 6500 \text{ kilogr. . . . . IV.}$$

D'après l'analogie que fournit la table XVII[a], nous obtenons pour la charge d'une moitié du pont:

$$k' = {}^{5}/_{4}\, k = 4760 \text{ kilogr. . . . . V.}$$

La tension maximum ou la pression maximum *dans les nervures* a lieu pour une charge maximum uniformément répartie; d'après la définition du système de Mr. Pauli, cette tension reste la même dans tous les panneaux, c'est pour celui du milieu que la détermination se fera le plus simplement; cette charge est égale à

$$\max \mathfrak{M}_{4\,1/2} = \frac{q l^2}{8} = 6500 \cdot \frac{37^2}{8} = 1112{,}3 \text{ mètres-tonnes}$$

$$\mathfrak{H}_{4\,1/2} = 5{,}6 \text{ mètres}$$

donc, d'après l'équation 255), puisque le moment se répartit également sur les deux poutres:

$$U_{4\,1/2} = O_{4\,1/2} = \frac{1}{2} \frac{1112300}{5{,}6} = 98296 \text{ kilogr.}$$

pour la *pression moyenne maximum* dans la nervure supérieure:

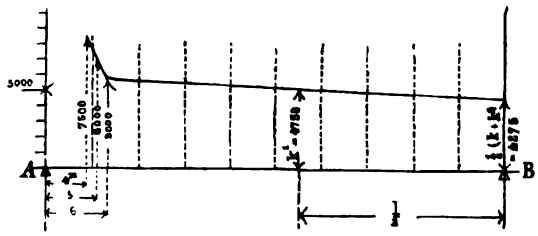
$$\mathfrak{B}_m = \frac{99286}{151{,}7} = 654 \text{ kilogr.}$$

pour la *tension maximum* dans la nervure inférieure:

$$\mathfrak{A} = \frac{99286}{132{,}2} = 734 \text{ kilogr.}$$

Les plus grandes forces dans les *barres inclinées* et dans les *barres verticales* auront lieu pour une charge partielle, lorsque la surcharge se sera avancée jusqu'au milieu du panneau qu'on considère; la valeur k varie avec la longueur de la surcharge comme le représente la fig. 134; pour le cas spécial qui nous occupe, nous avons construit la fig. 205, dans laquelle on peut prendre à l'échelle (ou par une proportion arithmétique) la valeur de k, qui correspond à une longueur quelconque de la surcharge.

Fig. 205.



Le mode du calcul indiqué dans les N^{os}. **162** et **163** est représenté dans la table LIII.

Après avoir trouvé k pour chaque panneau d'après la fig. 205, on détermine $\mathfrak{M}_{m-1}$ et $\mathfrak{M}_m$ pour chacun des panneaux d'après les équations 240) et 241); la force qui agit dans les barres s'obtient par l'équation 244) et la tension $\mathfrak{A}$ par l'équation 245.

Pour déterminer la force dans les barres verticales, on écrira la valeur max $\mathfrak{B}_m$ d'après l'équation 239); $\mathfrak{M}_{m-1}$ correspondant est déjà connu, ensorte qu'on pourra calculer chaque V_{m-1} d'après l'équation 247). Dans cette équation, P'_u est pris dans la table LII; le poids total d'une poutre est de 32,16 tonnes soit de 869 kilogr. par mètre courant, ensorte que la charge que doit supporter la verticale (m — 1) à son extrémité inférieure est,

pour les deux articulations extérieures:

$$P'_u = \tfrac{1}{4}\, 4{,}25 \,.\, 869 \text{ kilgr.} = 923 \text{ kilogr.}$$

et pour les articulations intermédiaires:

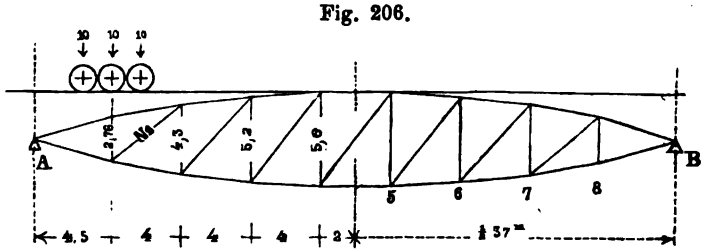
$$P'_u = \tfrac{1}{4}\, 4{,}0\ 869 = 869 \text{ kilogr.}$$

Les fonctions trigonométriques des angles que forment les nervures et les barres avec l'horizon, ainsi que les valeurs $\mathfrak{H}_m$ et $\mathfrak{H}_{m+1}$, s'obtiennent directement à l'aide de la fig. 203.

D'après la table LIII, nous voyons que chaque N augmente graduellement de A vers B, mais que les sections augmentent aussi de 12,0 cent. jusqu'à 19,2 cent. carrés; puisque les constructeurs, pour le calcul des dimensions de chaque barre, ont cherché la position la plus défavorable des locomotives et que les forces dans les nervures ont été déterminées d'après ces charges réelles concentrées, les résultats que montre notre table LIII prouvent que la méthode générale que nous employons est suffisante et renferme aussi les résultats d'un calcul fait avec des charges concentrées.

Nous prouverons encore ce que nous venons d'avancer par un calcul direct pour la barre N_2 la plus rapprochée de la culée A. Cette barre fatigue au maximum lorsque la locomotive se trouve avec son axe du milieu immédiatement au-dessus des verticales (1), comme le représente la fig. 206; pour ce mode de charge on a:

Fig. 206.



$$A = \frac{pl}{2} + \frac{32,5}{37,0}\,30000 = 76351 \text{ kilogr.}$$

$$\mathfrak{M}_1 = A\,4,5 - \frac{p}{2} \cdot 4,5^2 - 1,5 \cdot 10000 = 301242 \text{ kilogrammètres,}$$

$$\mathfrak{M}_2 = A\,8,5 - \frac{p}{2}\,8,5^2 - 4,0 \cdot 30000 = 431446 \text{ kilogrammètres,}$$

d'où résulte:

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{H}_1} - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_2} = \frac{30124}{2,76} - \frac{431446}{4,3} = 8809 \text{ kilogr.}$$

tandis que dans la colonne (1) de la table LIII, nous trouvons 8817 kilogr.; cette coïncidence tient un peu du hasard, toutefois un résultat approximatif est donné par la détermination des réactions sur les appuis d'après l'équation 238[a]).

174. Le pont le plus important qui ait été construit jusqu'ici d'après le système de Mr. Pauli, est le *pont sur le Rhin à Mayence*, décrit dans une brochure spéciale publiée en 1861 par MM. Klett et Cie. à Nuremberg, qui étaient chargés du projet et de l'exécution de la construction métallique.

Table

$p = 2700$ kilogr. $\quad \frac{1}{2} p l = 50{,}0^{ts.}$ Distance des

Index m =	2	3	4
Charge de A jusqu'à $m - \frac{1}{2}$ donc $\lambda =$	6,5m	10,5	14,5
Surcharge par mètre $k_\lambda =$	5100k	5000	4860
$A + B = \lambda k_\lambda + p l$	133,15ts.	152,50	170,47
$B = \frac{p l}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2 l}$	52,63 *)	57,17 *)	63,80
$A = k \lambda + p l - B$	80,52 *)	95,33 *)	106,67
$\mathfrak{M}_{m-1} = A\left(\lambda - \frac{d}{2}\right) - \left(\frac{p+k}{2}\right)\left(\lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	283,35mts.	532,76	742,75
$\mathfrak{H}_{m-1}$	2,76m	4,3	5,2
$\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$	102662k	123753	142836
$\mathfrak{M}_m = B\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	403,53mts.	590,33	734,56
$\mathfrak{H}_m$	4,3m	5,2	5,6
$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	93845k	113520	131171
$\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	8817k	10233	11665
$\cos \varphi$	0,750	0,646	0,594
$N_m = \left(\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\right)\frac{1}{\cos \varphi}$	5878k	7920	9802
ω en cent. carrés	12,0	12,0	14,4
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	490k	660	680
$\mathfrak{B}_m = A - \lambda (k + p)$	− 29,82ts.	− 14,40	+ 2,95
$tg \beta_m$	0,1925	0,1125	0,0500
$tg \gamma_{m-1}$	0,3966	0,1925	0,1125
$P_{u_{m-1}}$	0,925ts.	0,87	0,87
$V_{m-1} = \mathfrak{B}'_m + (tg\beta + tg\gamma_{m-1})\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} - P'u_{m-1}$	18400	10818	12210
ω en cent. carrés	54,0	54,0	54,0
$\mathfrak{B}_m$	266	200	226

LIII. Pont sur le Main à Kitzingen.

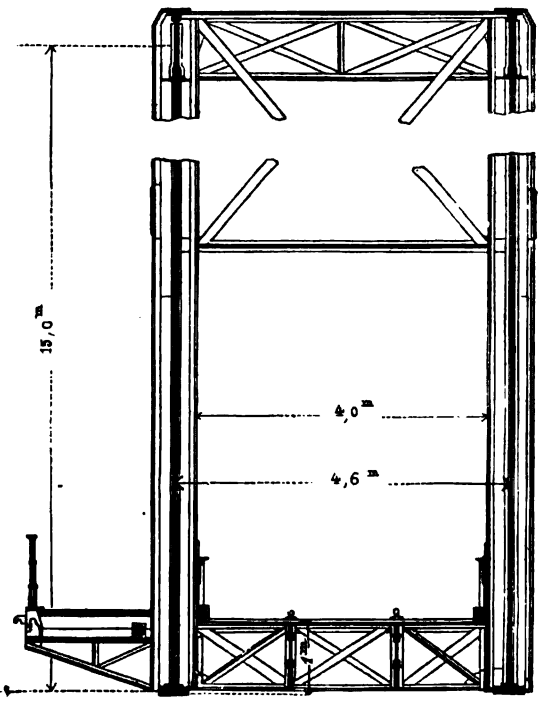
panneaux $= 4^m$, distance des panneaux extérieurs $= 4{,}5^m$.

5	6	7	8	9	Remarques.
18,5	22,5	26,5	30,5	34,75	$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$ sont calculés pour une voie et doivent être réduits de moitié dans le calcul d'une seule poutre; ces demi-valeurs sont représentées par $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{B}'$.
4750	4640	4530	4420	4300	
187,87	204,40	220,04	234,81	249,42	
71,97	81,74	93,00	105,57	120,17	
115,90	122,66	127,04	129,24	129,25	*) Les pressions sur les appuis pour $\lambda = 6{,}5^m$ et $10{,}5^m$ sont calculées d'après l'équation $\cdot 238^a$.
893,27	972,22	942,08	791,70	503,75	
5,6	5,6	5,2	4,3	2,76	
159512	173632	181165	184120	182500	
819,97	812,92	692,97	447,73		
5,6	5,2	4,3	2,76		
146423	156331	161155	162221		
13087	17300	20010	21900		
0,580	0,595	0,646	0,750		
11292	14537	15480	14540		
16,8	19,2	19,2	19,2		
670	757	806	757		
+ 21,92	+ 42,49	+ 64,55	+ 87,92	+ 114,1	La force dans les verticales atteint son maximum, pour le mouvement de la charge de A vers B, dans la verticale V_{m-1}, et pour une charge venant de B vers A, dans la verticale V_m.
0,00	— 0,050	— 0,1125	— 0,1925	— 0,3066	
0,050	0,00	— 0,050	— 0,1125	— 0,1925	
0,87	0,87	0,87	0,87	0,925	
14077	16034	16685	15010	10532	
54.0	54,0	54,0	54,0	54,0	
261	297	309	278	195	

Le pont est biais, les 4 grandes ouvertures ont une portée de 90 mètres mesurée perpendiculairement au Rhin, et de 101,29 mètres dans-œuvre, mesurée selon l'axe de la voie; à ces 4 grandes ouvertures viennent s'ajouter 28 ouvertures d'inondation, ensemble de 551 mètres dans-œuvre.

Pour les 4 grandes ouvertures, il fallait que la partie inférieure de la construction métallique fût à 14 mètres au-dessus du zéro du limnimètre, afin que les bateaux pussent encore circuler lors des plus hautes eaux navigables, aussi le tablier a-t-il été placé aussi bas que possible; sa hauteur a été fixée à 1 mètre, comme le représente l'esquisse (fig. 207).

Fig. 207.



La longueur des panneaux du pont sur le Rhin à Mayence est de 8 mètres, franchie à l'aide de poutres spéciales de 1 3/4 mètre de hauteur; ces longrines servent en même temps à l'attache du contreventement horizontal et reçoivent en outre une entretoise au milieu de chaque panneau, tandis que l'autre entretoise est fixée directement aux verticales principales.

La distance des entretoises est ainsi de 4 mètres; entre elles se trouvent deux longrines-sous-rails à parois pleines. — Par cet arrangement, la hauteur totale de la construction (1,0 mètre) est restée presque entièrement disponible pour les entretoises, qui ont été construites en treillis.

La disposition employée pour les nervures et pour les barres verticales est contenue dans la fig. 207; tous les détails ont été exécutés d'après les données contenues dans le N°. **170.**

La construction dans les ateliers commença au mois de mai 1860 et les pièces métalliques étant à-peu-près entièrement apprêtées, on commença en mars 1862 le montage des 4 grandes ouvertures. — Des palées à 25 mètres de distance furent pilotées et au-dessus on employa des poutres spéciales en fer forgé sur lesquelles fut posé un solide échafaudage; le 7 juin de la même année, on commença le placement de la construction métallique définitive de l'ouverture du côté de Gustavsbourg; cette ouverture, (la quatrième) était déjà franchie au milieu de septembre et le montage complet du pont était achevé au commencement de décembre, ensorte que le premier essai du pont put avoir lieu le 4 décembre 1862.

Le poids de la construction métallique du pont sur le Rhin à Mayence est, pour une des grandes ouvertures de 105,2 mètres de portée et de 15,0 mètres de hauteur géométrique de poutre:

Poutres principales, y compris les colonnes sur les appuis	268,26	tonnes,
Tablier	63,55	„
Consoles et garde-corps (d'un seul côté)	7,48	„
total	339,29	tonnes,

donc comme poids métallique par mètre courant:

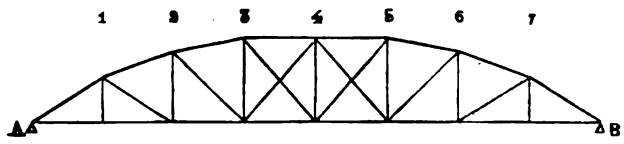
$$p' = 24{,}33\,l + 676 = 3230 \text{ kilogr.}$$

Les sections des nervures des poutres principales sont calculées d'après les règles du N°. **39**, où l'on suppose qu'une surcharge triple fournisse une tension limite de 1600 kilogr. par cent. carré. Les poutres principales des grandes ouvertures ont à supporter une tension maximum de 820 kilogr., ce qui, dans la table XIII, correspond au rapport $\frac{p}{k} = \frac{3340}{2939} = 1{,}14$.

175. Tandis que les poutres paraboliques (et les poutres de forme semblable du système de Mr. Pauli) réclament dans chaque panneau l'emploi de barres montantes et descendantes, ces barres doubles, dans les poutres rectilignes, ne sont nécessaires qu'au milieu, entre les abscisses a et l — a (voir l'équation 207).

Le *système de Mr. Schwedler*, à nervures cintrées, représenté en vue longitudinale dans la fig. 208, conserve les avantages indiqués des poutres rectilignes; dans ce système, la forme des nervures est déterminée de façon que, dans tous les panneaux (à l'exception de ceux du milieu), la force dans les barres pour min $\mathfrak{B}$ est nulle, et qu'alors aucune des barres ne travaille; pour une autre charge, la force qui agit dans les barres est positive, ensorte que les barres en sens opposé peuvent être supprimées (excepté dans les panneaux du milieu).

Fig. 208.



L'avantage que donne cet arrangement est ainsi décrit par Mr. Schwedler, en 1867, dans la „Bauzeitung" de Berlin:

„Comparées aux poutres droites, les diagonales peuvent être construites bien plus faibles; les verticales diminuent de hauteur du côté des culées, sont donc plus légères et plus stables; les barres sur les appuis disparaissent complétement, ensorte que la construction est rendue plus légère.

„Comparées aux poutres paraboliques, les nervures, au lieu d'augmenter, diminuent en section du côté des culées, toutefois pas aussi rapidement que dans la poutre droite, ensorte que la variation de section peut être facilement obtenue même par l'emploi de fers assez longs. — L'angle que forment les nervures à la culée est plus grand que dans les poutres paraboliques et la réunion des nervures comprimées et tendues, est ainsi facilitée."

176. Les systèmes doubles ou multiples peuvent être décomposés en systèmes simples dont les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{B}$ auront été déterminés d'une manière quelconque et serviront à fixer la forme de la poutre principale. Puisque le système de Mr. Schwedler est un système non-symétrique, à nervure inférieure rectiligne, à barres diagonales tirées, enfin puisque ces dernières ne sont inclinées que dans un sens et qu'elles agissent comme dans une poutre droite, il en résulte que, pour la moitié de gauche de la poutre, les forces dans les diagonales se trouveront à l'aide de la fig. 140 et de l'équation 190), et l'on obtient:

$$N \sin \varphi = \mathfrak{B}' - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg} \beta_m \quad . \quad . \quad . \quad 256)$$

Si cette force dans la barre doit être nulle pour min $\mathfrak{B}_m$, il faut que

$$\min \mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg} \beta_m \quad \ldots \ldots \quad 257)$$

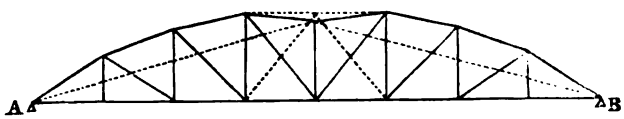
où min $\mathfrak{B}_m$ et $\mathfrak{M}_m$ sont des valeurs simultanées. — En prenant une certaine hauteur $\mathfrak{H}_m$ pour une articulation quelconque, on pourra déterminer la position respective des autres articulations d'après l'équation 257), et l'on obtient ainsi directement la forme de la nervure supérieure pour le côté où la surcharge s'est avancée. Mr. Schwedler donne à cet effet l'équation suivante:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{4 f x}{l^2} (l - x) \frac{p + \frac{k}{2}}{p + k \frac{x}{l}} \quad \ldots \quad 258)$$

où f est une hauteur fictive au milieu de la poutre, x l'abscisse de l'articulation qu'on considère. (Les valeurs de $\mathfrak{H}_x$, l, p et k ont leurs significations précédentes.)

L'origine des coordonnées étant en A, l'équation 258) n'est applicable que pour la partie comprise entre A et le milieu du pont; l'autre moitié de la poutre se construira symétriquement par rapport au milieu, comme le représente la fig. 209. —

Fig. 209.



La nervure supérieure des panneaux du milieu formerait un angle rentrant, qu'on remplace dans l'éxécution, par une ligne horizontale; c'est à cause de cette modification qu'il est nécessaire d'employer, dans ces panneaux, des barres dans les deux sens, comme le montre en pointillé la fig. 209.

Dans le N°. 47 de la „Bauzeitung" de Berlin, année 1868, Mr. E. Grütefien fait remarquer que la forme obtenue pour la nervure d'après l'équation 258), qui fournit la limite inférieure des articulations supérieures, est basée sur une charge constante, uniformément répartie, qui n'existe pas en réalité; si l'on fait un calcul exact des moments qui résultent d'une charge donnée de locomotives, on trouve que la limite, pour les articulations supérieures, est plus élevée et Mr. Schwedler lui-même, dans quelques cas, a modifié un peu la forme de la poutre.

Nous obtiendrons une limite supérieure plus exacte au moyen de l'équation 257), en prenant dans la détermination de min $\mathfrak{B}_m$ et de $\mathfrak{M}_m$ correspondant, un k_λ variable se rapportant à la longueur λ de la surcharge, comme le montre plus particulièrement la fig. 134.

177. En établissant les *formules pratiques* pour un système simple de Mr. Schwedler, nous avons à considérer dans le calcul des dimensions des *nervures*, la charge maximum uniformément répartie, que nous nommerons $q = p + k$ par mètre courant; en conservant les notations du N°. **134**, nous obtenons dans ce cas, d'après les équations 175)—179a):

$$A = \frac{q\,l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 259)$$

$$\mathfrak{M}_m = A\,x_m - \frac{q\,x_m^{\,2}}{2} \quad . \quad . \quad 260)$$

$$\mathfrak{B}_m = A - q\,x_{m-1/2} \quad . \quad . \quad 261)$$

d'où résulte pour les forces qui agissent dans les nervures, d'après les équations 185) à 186):

$$O_m \cos\beta_m = U_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 262)$$

$$U_m = O_{m-1} \cos\beta_{m-1} = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad 263)$$

et pour la nervure supérieure:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 264)$$

$$\mathfrak{B} = \left(1 + K\,\frac{\Omega\,L^2}{\Theta}\right)\frac{O_m}{\Omega} \quad . \quad . \quad 265)$$

et enfin pour la nervure inférieure:

$$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 266)$$

Il peut être désirable de connaître les forces dans les barres et dans les verticales pour la charge maximum uniformément répartie; d'après l'équation 189), pour la partie du pont située à gauche du côté de la culée A, nous avons:

$$N_m \cos\varphi = \left(\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right) \quad . \quad . \quad 267)$$

$$N_m \sin\varphi = \mathfrak{B}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\,tg\,\beta_m \quad . \quad . \quad . \quad 267a)$$

et, en écrivant les conditions d'équilibre pour l'articulation inférieure m:

$$V_m = N_m \sin \varphi - P'_u \quad \ldots\ldots \quad 268)$$

Introduisant le propre poids $p = C\,l + F$ [voir l'équation 213)] nous obtenons:

$$P_u = \left(k + \frac{C\,l}{2} + F\right) d \quad \ldots\ldots \quad 269)$$

où d représente la portée moyenne des deux panneaux situés à gauche et à droite de m.

Pour la barre verticale du milieu, qui, à sa partie inférieure, est comprise entre deux diagonales à forces opposées, nous obtenons en écrivant les conditions d'équilibre, d'après l'équation 194) pour l'articulation supérieure:

$$\left.\begin{aligned} V_{1/2\,l} &= P'_0 \\ P_0 &= {}^1/_2\, C\,l\,.\,d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 269^a)$$

le plus souvent il existe deux poutres principales, par conséquent on aura P'_0 égal à $^1/_2\, P_0$.

Pour la détermination *des forces maxima dans les barres diagonales et verticales*, nous devons prendre la charge partielle maximum et pour une charge se mouvant de la culée de droite B jusqu'au milieu du panneau qu'on considère, par analogie avec les formules 238)—241) pour une poutre parabolique, nous avons:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p\,l}{2} + \lambda\, k\, \frac{\lambda}{2\,l} \\ B &= \frac{p\,l}{2} + \lambda\, k\, \frac{2l-\lambda}{2\,l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 271)$$

$$\mathfrak{B}_m = A - (k+p)\,\lambda \quad \ldots\ldots \quad 272)$$

et pour les moments de flexion simultanés:

$$\mathfrak{M}_{m-1} = A\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \ldots \quad 273)$$

$$\mathfrak{M}_m = B\left(\lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{q}{2}\left(\lambda - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 274)$$

Il résulte de l'équation 188) pour les *barres diagonales*:

$$N_m \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad 275)$$

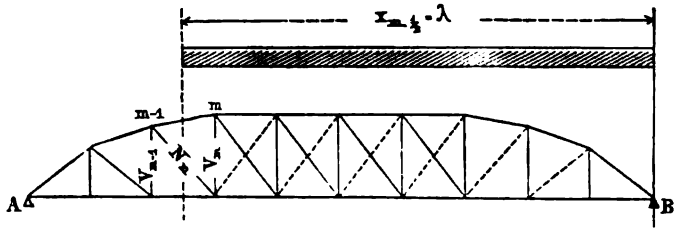
$$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega} \quad \ldots\ldots \quad 276)$$

L'extrémité inférieure de la barre N_m, pour la portion du pont considérée, est dirigée du côté de B, parce que les diagonales opposées n'existent pas (sauf pour les panneaux du milieu); on obtient donc pour la verticale V_m, en écrivant les conditions d'équilibre pour l'articulation inférieure m:

$$V_m = N_m \sin \varphi - P'_{u_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 277)$$

La tension dans cette verticale peut encore augmenter; d'après le développement du N°. **151**, elle atteindra son maximum pour un tablier situé à la partie inférieure des poutres, lorsque la charge

Fig. 210.



se sera avancée de B jusqu'au milieu de la diagonale m + 1; la fig. 210 représente la position de la surcharge pour laquelle la verticale V_{m-1} travaille au maximum, et nous trouvons:

$$\begin{aligned} V_{m-1} &= -\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg} \beta_{m-1} - \mathfrak{B}'_{m-1} - P'_{u_{m-1}} \\ &= -\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg} \beta_{m-1} - \mathfrak{B}'_m + P'_{o_{m-1}} \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad 278)$$

dans cette équation, $\mathfrak{B}_m$ est *négatif* entre la culée A et l'abscisse l — a (voir l'équation 207).

Du côté de la culée B, d'après l'équation 275), $N_m \cos \varphi$ devient *négatif* ce qui signifie que des barres inversement inclinées entrent en action au lieu des barres N; pour ces panneaux, on a donc d'après l'équation 192):

$$V_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg} \beta_{m+1} + \mathfrak{B}'_m + P'_{o_m} \quad \ldots\ldots \quad 279)$$

$$\left.\begin{aligned} V_{m-1} &= \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg} \beta + \mathfrak{B}'_{m-1} + P'_{o_{m-1}} \\ &= \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} + \mathfrak{B}'_m - P'_{u_{m-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 280)$$

Pour les verticales max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, où les barres diagonales soumises à la traction changent de signe, nous écrirons les conditions d'équilibre pour l'articulation supérieure, et d'après l'équation 194), d'une façon analogue à la fig. 142ª, nous obtenons:

$$V_m = P'_o + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (t g \beta_m - t g \beta_{m+1}) \quad . \quad . \quad . \quad 281)$$

en remarquant que, pour un mouvement de la surcharge de B vers A, le point max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ se trouve toujours sur la partie de droite du pont.

Dans les équations ci-dessus 271)—281), on a toujours supposé la charge avancée de B jusqu'au milieu du panneau m — 1 et la charge du panneau demi-chargé concentrée sur la verticale m; dans toutes les équations mentionnées, on aura donc:

$$P_{u_{m-1}} = P_{o_m} = P_{o_{m-1}} = {}^1/_2 \, Cl \, . \, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 282)$$

$$P_{u_m} = (k + {}^1/_2 \, Cl + F) \, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 283)$$

équations dans lesquelles d représente la distance moyenne des deux panneaux adjacents à la verticale considérée.

178. De même que les formules exposées pour les équations 259) à 283) sont fondées sur les formules générales 175)—179ª) et 185)—194ª; dans les deux cas, on a supposé un système simple, non-symétrique, à barres diagonales soumises à la tension.

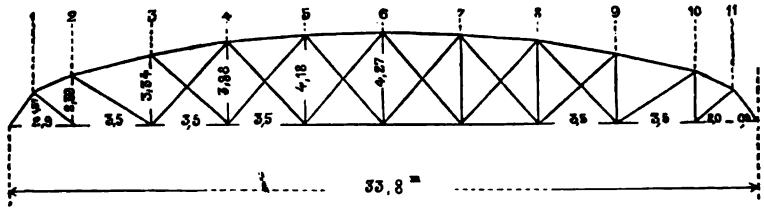
Ces deux séries d'équations doivent fournir le même résultat pour des barres de poutres cintrées, avec un tablier situé à la partie inférieure des poutres; il faut observer toutefois que, dans les équations 238)—252), la charge est supposée s'avançant de A vers B, tandis que dans les équations 271)—283), elle est supposée venant de B vers A.

Bien qu'il existe une grande analogie entre ces poutres paraboliques et le système de Mr. Schwedler, et qu'une coïncidence multiple existe dans les formules qui servent au calcul, il faut remarquer que la différence principale consiste en ce que ce sont précisément les diagonales épargnées dans le système de Mr. Schwedler qui fatiguent le plus dans la poutre parabolique.

Mr. J. W. Schwedler a construit d'après son système un assez grand nombre de ponts, dont quelques-uns sont décrits dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin, entre autres les ponts de routes sur l'Oder à Breslau; ces derniers se distinguent des ponts de chemins de fer surtout en ce que, par suite du poids considérable de la chaussée elle-même, il n'existe qu'un seul panneau à doubles barres diagonales, et que la courbe de la nervure elle-même est à-peu-près en arc de cercle.

179. Une variété dans la forme de la poutre existe pour le *pont sur le Colomak*, projeté par Mr. F. Laissle pour la ligne Charkow-Krementschug; le calcul suivant est fait à l'aide des formules 259)—283).

Fig. 211.

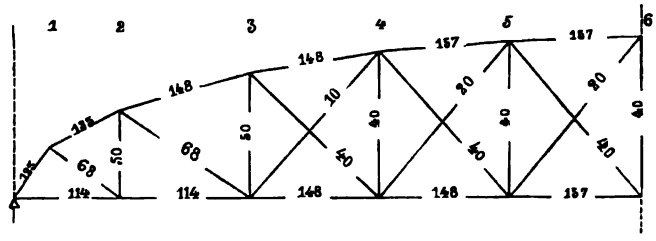


Ce pont a 33,8 mètres de portée, et la portée est divisée en 10 panneaux (voir fig. 211).

La disposition du panneau extrême est remarquable en ce que sa nervure supérieure est brisée; par cet arrangement, l'angle sous lequel les deux nervures sont assemblées est plus grand (moins aigu) et la forme nette de l'ellipse a pu être maintenue pour la nervure supérieure; les six panneaux du milieu ont reçu des barres diagonales dans les deux sens, ce qui aurait pu être évité en partie, si l'on avait interpolé un élément rectiligne et horizontal entre les deux quarts de l'ellipse.

Le pont est représenté dans la planche XIV, ainsi que les détails de la poutre et l'arrangment du tablier; les dimensions des sections des poutres principales sont indiquées en centimètres carrés dans la fig. 212, où l'on a fait déduction des logements des rivets.

Fig. 212.



Le *propre poids* du pont sur le Colomak se compose, par mètre courant, comme suit:

Poutres principales:

Nervure supérieure . . .	430 kilogr.	
„ inférieure . . .	393 „	
Barres verticales	153 „	
„ diagonales . . .	150 „	
Contreventement	34 „	
		1160 kilogr.

Tablier:

Entretoises	180 kilogr.	
Longrines-sous-rails . . .	280 „	
Rails	68 „	
Traverses et madriers . .	182 „	
		710 kilogr.
	Total	1870 kilogr.

Le poids propre de la construction est donc:

$$p = 34{,}3\ l + 710 = 1870 \text{ kilogr.}$$

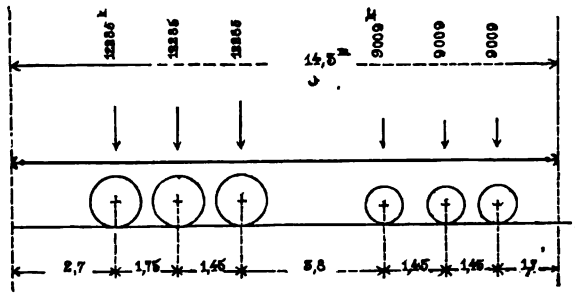
et le poids propre métallique, déduction faite des rails, traverses et madriers:

$$p' = 34{,}3\ l + 460 = 1620 \text{ kilogr.}$$

par mètre courant de simple voie.

Comme *surcharge* on a pris les locomotives esquissées dans la fig. 213 et comme charge maximum on a supposé que trois de

Fig. 213.



ces locomotives dussent se trouver sur le pont; une charge uniformément répartie, de k = 4564 kilogr. produirait une même max $\mathfrak{M}$ au milieu du pont.

Pont sur le Colomak. Table

$p = 1870^k$ $k = 4564^k$ $q = 6434^k$

Index m =	1	2
x_m	0,91m	2,9
$\mathfrak{H}_m$	1,37m	2,39
$\mathfrak{M}_m = Ax_m - \frac{q}{2} x_m^2$ D'après l'équation 260).	90,46mts*)	288,3
$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	66,03ts	120,6
$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ D'après l'équation 263).		33,01ts
$\mathfrak{Q}_m$ en cent. carrés		114
$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\mathfrak{Q}_m}$ en kilogr.		289
$\frac{1}{\cos \beta}$	1,696	1,135
$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \frac{1}{\cos \beta}$ D'après l'équation 262).	55,98ts	68,44
$\mathfrak{Q}_m$ en cent. carrés	125	125
$\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\mathfrak{Q}_m}$ en kilogr.	448	547
$N_m \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ D'après l'équation 267).		27280k
$\cos \varphi$		0,822
$\operatorname{tg} \varphi$		0,690
N_m		33190k
$N_m \sin \varphi = \left(\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \right) \operatorname{tg} \varphi$		18820
$P'_u = \frac{1}{2} d \left(q - \frac{C l}{2} \right)$ D'après l'équation 230).		9360
$V_m = N_m \sin \varphi - P'_u$ D'après l'équation 268).		9460

LIV. Calcul des nervures.

$l = 33{,}8^m$ $\quad A = q\,\frac{l}{2} = 108{,}735^{ts}$.

3	4	5	6	Remarques.
6,4	9,9	13,4	16,9	
3,34	3,88	4,18	4,22	
564,1	761,2	879,4	918,8	*) $\mathfrak{M}_1 = \frac{0{,}91}{2{,}90}\,\mathfrak{M}_2$.
168,9	196,2	210,4	215,2 *)	*) Puisque $\frac{\mathfrak{M}}{\Phi}$ atteint sa valeur maximum au milieu de la poutre, dans le cas actuel de charge maximum uniformément répartie, les extrémités inférieures de toutes les diagonales soumises à la traction sont inclinées du côté du milieu du pont.
60,30	84,45	98,10	105,20	
114	148	148	157	
529	570	663	670	
1,036	1,012	1,004	1,00	
87,49	99,28	105,62	107,60	
148	148	157	157	
591	632	673	685	
24150	13650	7100	2400	
0,826	0,724	0,670	0,666	
0,683	0,690	1,109	1,194	
29240	18850	10600	3600	
16090	13020	7870	2865	
10245	10245	10245	10245	
5845	2775	− 2375	− 4515 *)	*) $V_6 = 2\,N_6 \sin\varphi - P'_u$.

180. Le poids propre du pont et la surcharge étant fixés et les dimensions de la constructon métallique étant indiquées dans la planche XIV et dans la fig. 212, on peut calculer les tensions et les compressions de la matière, d'après les équations 259)—283).

Les *nervures* fatiguent au maximum pour la charge maximum uniformément répartie; les tensions et les compressions moyennes qui en résultent se trouvent d'après les équations 259)—266) et sont consignées dans la table LIV. Cette table renferme aussi les forces N et V des barres, qui correspondent à la surcharge maximum, et qui sont calculées d'après les équations 267)—269).

Les *barres diagonales et verticales* travaillent au maximum pour une surcharge partielle qui réclame l'emploi d'un k, variable avec la longueur de la surcharge. — La locomotive représentée dans la fig. 213 avec son tender, se rapproche beaucoup de la locomotive à marchandises qui a servi au calcul de la table XVII^a, aussi peut-on prendre le rapport $\frac{k^1}{k}$ dans cette table; pour le chargement d'une moitié du pont et pour 33,8 mètres de portée, nous obtenons:

$$k^1 = 1{,}275\ k = 1{,}275 \cdot 4560 = 5810 \text{ kilogr.}$$

En employant la méthode indiquée dans la fig. 134, pour le cas qui nous occupe, nous obtenons pour les abscisses $\lambda = 4^m$, $4{,}65^m$ et $5{,}5^m$, les k_λ correspondants

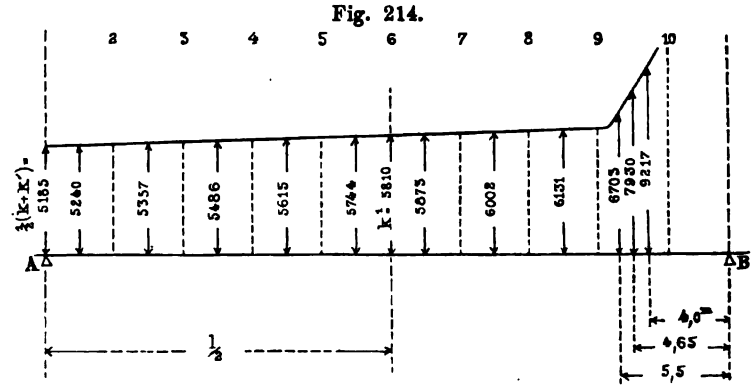
$$k_\lambda = \frac{36882}{4{,}0}, \quad \frac{36882}{4{,}65} \text{ et } \frac{36882}{5{,}5},$$

de plus, pour la charge non-symétrique du pont entier:

$$k_0 = \frac{k + k'}{2} = 5185 \text{ kilogr.}$$

et nous trouvons enfin les valeurs de k_λ pour la surcharge jusqu'au milieu de chaque panneau; ces valeurs sont représentées dans la fig. 214.

Fig. 214.



En remplaçant ces valeurs de k_λ dans les équations 271)—274), nous obtenons les moments de flexion $\mathfrak{M}$ et les efforts tranchants $\mathfrak{B}$, qui se rapportent, autant que possible, à la charge fournie par la locomotive indiquée dans la fig. 213.

Toutes les $\mathfrak{M}$ et tous les $\mathfrak{B}$ étant ainsi déterminés, l'équation 275) fournit les forces dans les *barres diagonales*; ces forces sont contenues dans la table LV.

Les formules 277)—283) nous fournissent les forces V_{m-1} et V_m qui agissent dans les *barres verticales* des deux côtés du panneau considéré pour une surcharge qui s'est avancée jusqu'au milieu du panneau m (m — 1); ces forces sont contenues dans la table LVI; d'après les explications du N°. **151**, pour le cas qui nous occupe — celui où le tablier est fixé aux articulations inférieures — les forces V_{m-1} indiquent le travail maximum sous lequel agissent les barres verticales, — (ce qui résulte évidemment de la table LVI si l'on compare les V_{m-1} avec les V_m indiqués dans la colonne verticale précédente).

Les valeurs V_m de cette table sont en partie négatives, donc ces verticales sont soumises à des efforts de traction pour la charge considérée. — C'est avec V_m que ces forces de tension atteignent leur maximum et la tension est d'autant plus grande que la force dans les barres est plus faible et que la charge P_n immédiatement supportée est plus grande; les forces de tension un peu importantes ne peuvent donc se trouver qu'aux articulations chargées et surtout à l'entrée de la surcharge lorsque les articulations inférieures (10) et (8) n'ont à supporter que de faibles forces de diagonales; il en est de même au milieu du pont pour une surcharge également répartie; c'est pour cette raison que les valeurs de V_6 de la table LIV fournissent une tension assez grande. (Cette tension est d'environ 112 kilogr. par centimètre carré, tandis que la pression maximum dans la même barre verticale, d'après la table LVI, est de 180 kilogr.)

Remarque. Le pont sur le Colomak est calculé d'après les mêmes formules que le pont sur le Main à Mayence (N°. **172**); toutefois le calcul est un peu différent, non-seulement parce que la nervure inférieure du pont sur le Colomak sit rectiligne et que le calcul est ainsi simplifié, mais aussi pour d'autres raisons. Pour des ponts se rapprochant du type des ponts paraboliques, les barres diagonales voisines de la culée travaillent au maximum lorsque la charge commence eà agir, ensorte qu'il y a lieu de considérer la surcharge comme se mouvant de A vers B; si les ponts se rapprochent du système de Mr. Schwedler, comme le pont sur le Colomak, les diagonales ne travaillent que peu lorsque la surcharge commence à agir (théoriquement la force dans ces barres devrait être nulle), donc, comme pour des poutres droites, le maximum des forces dans les barres est occasionné par une surcharge qui se trouve sur une longueur plus grande que la moitié du pont, ensorte qu'il est préférable de considérer le mouvement de la surcharge de B vers A. — Une autre différence existe encore dans le calcul, en ce que le tablier se trouve à la partie supérieure des poutres pour le pont sur le Main à Kitzingen et à la partie inférieure pour le pont sur le Colomak.

Table

Pont sur le Colomak. $p = 1870^k$ $l = 33{,}8_m$

Index m =	2	3	4	5
x_m	2,9m	6,40	9,90	13,40
$\lambda = l - x_m - \frac{d}{2} =$	32,35m	29,15	25,65	22,15
k_λ d'après la fig. 214.	5240k	5357	5486	5615
$q = k_\lambda + p =$	7110k	7227	7356	7485
$A + B = pl + \lambda k_\lambda$	232,72ts	219,36ts	203,92	187,58
$A = \frac{pl}{2} + \lambda k_\lambda \frac{\lambda}{2l}$	112,72ts	98,94	84,86	72,36
B	120,0ts	120,42ts	119,06	115,22
$\mathfrak{M}_{m-1} = A\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	96,05mts *)	276,06	504,91	626,72
$\mathfrak{H}_{m-1}$	1,37mts	2,89	3,34	3,88
$\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$	70,1ts	116,76	151,17	161,01
$\mathfrak{M}_m = B\left(\lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{q}{2}\left(\lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	313,65mts	586,80	744,58	792,99
$\mathfrak{H}_m$	2,39m	3,34	3,88	4,18
$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	131,23ts	175,67	191,90	189,71
$N_m \cos\varphi = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right\}$	30565k	29465	20377	14350
$\cos\varphi$	0,822	0,826	0,724	0.670
N_m	37184k	35680	28145	21434
ω_m en cent. carrés.	68	68	40	40
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega_m}$	547k	524	703	536

LV.

$p\,l = 63{,}2^{ts}$. Calcul des barres diagonales.

6	7	8	9	10	11	Remarques.
16,90	20,40	23,90	27,45	30,90	32,9	
18,65	15,15	11,65	8,15	4,65	4,65 *)	*) $\lambda = 11 = \lambda_{11}$, puisque le point (11) n'est pas chargé.
5744 7614	5873 7743	6002 7872	6131 8001	7930 8800		
170,38	152,17	133,13	113,17	100,08		
61,16	51,54	43,65	37,68	34,14		
109,17	100,63	89,48	75,54	65,94		
651,62	586,00	501,18	365,26	233,475		*) $\mathfrak{M}_1 = \frac{0{,}915}{2{,}900}\,\mathfrak{M}_2$, puisque le point (1) n'est pas chargé.
4,18	4,27	4,18	3,88	3,34		
155,89	137,47	119,90	94,14	69,90		
757,71	653,29	499,78	319,68	150,02	73,68 *)	*) $\mathfrak{M}_{11} = \frac{0{,}915}{2{,}9}\,\mathfrak{M}_{10}$.
4,27	4,18	3,88	3,34	2,39	1,37	
177,45	156,29	128,81	95,70	64,02	58,74	
10783	9412	4453	780	— 2940	— 8077 *)	*) $N_m \cos\varphi$ indique une tension dans les barres T_{10} et T_{11}.
0,667	0,634	0,667	0,670	(0,826)	(0,822)	
16170	14845	6676	1165	(— 3560)*)	(— 9960)*)	
28	20	20	10	(68)	(68)	
577	742	334	116	(72)	(146)	

Pont sur le Colomak. Table

$p = C1 + F = 1160 + 710$ kilogr.,

Index m =	2	3	4	5
x_m	2,9m	6,4	9,9	13,4
$\lambda = l - x_m + \frac{d}{2}$	32,35m	29,15	25,65	22,15
k_λ	5240k	5357	5486	5616
$q = p + k$	7110k	7227	7356	7485
B d'après la table LV.	120,00ts.	120,42	119,06	115,22
$\mathfrak{B}_m = \lambda\,(p + k) - B$	110,0ts.	90,24	69,62	50,57
$P'_{u_m} = \frac{1}{2}\,(k + {}^1/_2\,C1 + F)\,d$	10448k *)	11630	11808	12082
$P'_{u_{m-1}} = \frac{1}{2}\,(F + {}^1/_2\,C1)\,d$		2064 *)	2257	2257
$P'_{o_{m-1}} = {}^1/_2\,C1\,d$	928k	1015	1015	1015
$\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ d'après la table LV.	70,11ts.	116,76	151,17	161,01
$tg\,\gamma_{m-1}$		0,514	0,271	0,154
$\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\,tg\,\beta_{m-1}$		30,02ts.	20,48	12,40
$V_{m-1} = -\mathfrak{B}'_m + P'_{o_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\,tg\,\beta_{m-1}$		16115	15345	13900
ω_{m-1}		50	50	40
$\mathfrak{B}_m$		322	307	322
$N_m \cos\varphi$ d'après la table LV.	30565k	29465	20377	14350
$tg\,\varphi$	0,69	0,683	0,954	1,109
$N_m \sin\varphi = N_m \cos\varphi\,tg\,\varphi$	21090k	20124	19440	15914
$V_m = N_m \sin\varphi - P'_{u_m}$	10642k	8494	7632	3832

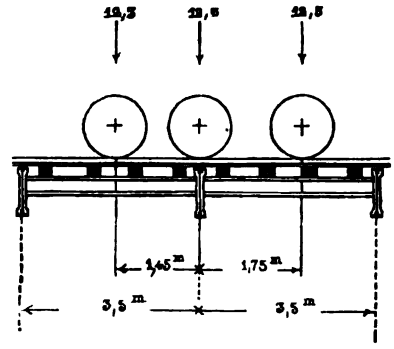
LVI. Calcul des barres verticales.

$l = 33{,}80^m$, Distance des panneaux $x_{m+1} - x^m = d$.

6	7	8	9	10	11	Remarques.
16,9	20,4	21,9	27,4	28,9	30,9	
18,65	15,15	11,65	8,15	4,65	4,65	$\lambda_{11} = \lambda_{10}$, puisle point (11) n'est pas chargé.
5744	5873	6002	6131	7930		
7614	7743	7872	8001	9800		
109,17	100,63	89,48	75,54	65,94		
32,83	16,63	2,23	— 10,34	— 20,37		
12310	12533	12761	12985	14752 *)		*) Pour les barres verticales extrêmes, la distance moyenne des panneaux est égale à $\frac{1}{2}(3{,}5 + 2{,}9)$.
2257	2257	2257	2257	2257		
1015	1015	1015	1015	928		
155,89	137,47	119,90	94,14	69,90		
0,086	0,026	— 0,026	— 0,086	— 0,154		
6,70	1,78	— 1,56	— 4,05			
10730	7550	3690	— 107			
40	40					
268	189					
10783	9412	4453	780	— 2940 *)	— 8077 *)	*) N négatif indique que les barres inclinées dans l'autre sens (T) viennent à agir.
1,194	1,22	1,194	1,109	0,683 *)	0,69 *)	
12875	11483	5317	865	1828 *)	5573 *)	
565	— 1150	— 7444	— 2240 **)	— 9179 **)		**) D'après l'équation 231).

181. La fig. 215 représente la position de la locomotive pour laquelle les *entretoises* sont soumises au plus grand effort possible; on obtient pour l'entretoise II comme surcharge de la locomotive:

Fig. 215.

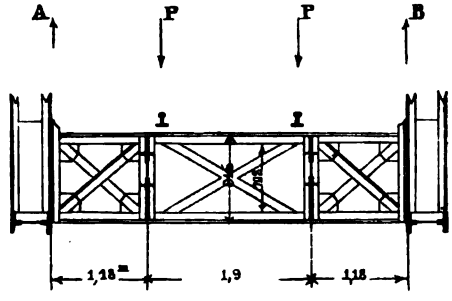


$$12300 \left(1 + \frac{2{,}05}{3{,}50} + \frac{1{,}75}{3{,}60}\right) = 25600 \text{ kilogr.}$$

à ajouter le poids du tablier de 710 kilogr. par mètre, donc sur 3,5 mètres de longueur . . 2485 »

Total 28085 kilogr.

Fig. 216.



Cette charge des entretoises doit être répartie également sur les deux points chargés, comme le représente la fig. 216.

La pression sur l'appui A est de 14040 kilogr., donc:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = 14040 \times 1{,}18 = 16567 \text{ kilogr.}$$

Ce moment est le même sur toute la longueur du panneau du milieu et est supporté par deux cornières d'ensemble 40 cent. carrés, déduction faite des rivets; on trouve les efforts de tension et de pression d'après l'équation 55):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{b_0}{b}\,\mathfrak{B}\,.\,\Omega\,.\,\mathfrak{H}_0 \\ \mathfrak{M} &= \frac{a_0}{a}\,\mathfrak{A}\,.\,\Omega\,.\,\mathfrak{H}_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 284)$$

En plaçant dans cette équation la distance $\mathfrak{H}_0$ des centres de gravité des nervures = 0,85 mètre et $\frac{b_0}{b} = \frac{a_0}{a} = 1$ (en admettant une même tension sur la section entière des nervures), nous obtenons:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \frac{16567}{40\,.\,0{,}85} = 487 \text{ kilogr.}$$

La force P qui agit sur les articulations et qui est égale à la pression sur l'appui A = 14040 kilogr., doit être rapportée sur l'appui (c'est-à-dire sur les verticales des poutres principales), à l'aide de deux cornières soumises à la pression et d'une tige soumise à la tension; si nous nommons N la somme des forces dans ces barres, qui forment un angle φ avec l'horizon, nous aurons:

$$\Sigma N \sin \varphi = A = 14040 \text{ kilogr.}$$

$$\Sigma N = \frac{14040}{0{,}65} = 23000 \text{ kilogr.}$$

cette force est supportée par une section formée de:

2 cornières à 16,77	=	33,54	cent. carrés,
1 tige soumise à la tension	=	12,90	„ „
	total	46,44	cent. carrés,
à déduire pour 2 rivets		5,0	„ „
	restent	41,44	cent. carrés.

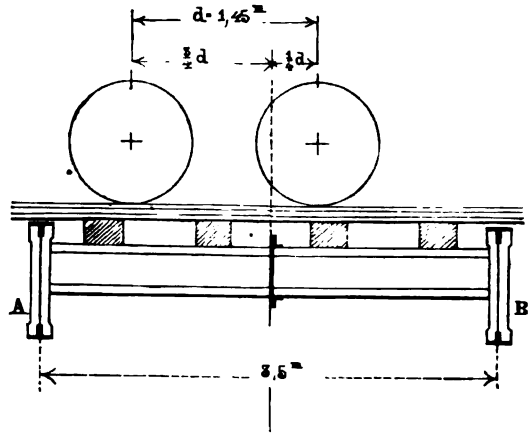
La tension maximum est donc de

$$\frac{23000}{41{,}4} = 555 \text{ kilogr.}$$

La fig. 217 représente la position de la locomotive qui charge les *poutrelles* au maximum; la pression B sur l'appui est égale à

$$B = \frac{211 + 0{,}66}{3{,}50} \cdot 12300 = 9734 \text{ kilogr.},$$

Fig. 217.

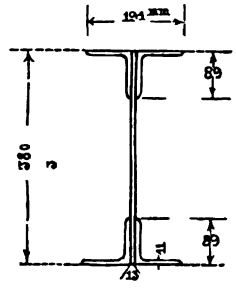


et le moment sur la traverse III est de:

$$\mathfrak{M}_3 = 9734 \times 1{,}39 = 12530 \text{ kilogrammètres.}$$

Ce moment se répartit sur deux poutrelles dont chacune supporte un effort de 6265 kilogrammètres.

Fig. 218.



La section des poutrelles est représentée dans la fig. 218, et enfin, en plaçant dans l'équation 150) $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{H}_0}{2}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = {}^1/_2 H$, nous trouvons comme maximum de tension dans la nervure:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{H}_0^2}{H} (\Omega + {}^1/_6 \delta \mathfrak{H}_0) \quad . \quad . \quad . \quad 159)$$

Nous avons dans cette équation:

$\Omega = 2 \cdot 18{,}5$	=	37,0	cent. carrés,
déduction pour 1 rivet		7,0	„ „
		30,0	cent. carrés,
addition de ${}^1/_6 \delta \mathfrak{H}_0 = {}^1/_6 (1{,}3 \times 3{,}3)$	=	7,1	„ „
	total	37,1	cent. carrés,

$\frac{\mathfrak{H}_0^2}{H} = 0{,}309$ mètre, ensorte que:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \cdot \frac{1}{0{,}309} \cdot \frac{1}{37{,}1} = \frac{6265}{11{,}46} = 547 \text{ kilogr.}$$

182. Les ponts *sur le Wéser à Hoexter* (portée 58,25 mètres) et *sur l'Elbe à Tangermuende* (portée 65,9 mètres), sur la ligne de Berlin à Lehrte, ont été construits d'après le *système double* de Mr. Schwedler.

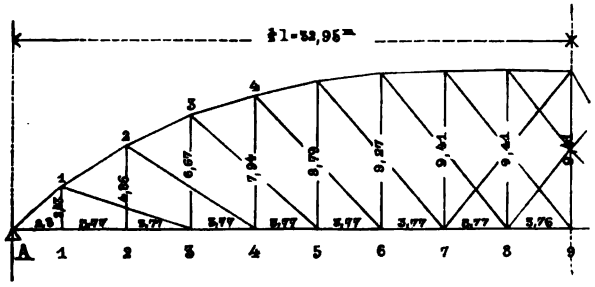
Le premier de ces ponts était représenté par des modèles et des dessins à l'exposition de Paris de 1867 et se trouve décrit dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin (1867).

Le second de ces ponts, aussi décrit dans la même publication (1868) par Mr. Schwedler lui-même, nous servira d'exemple pour les considérations suivantes.

La table XV représente l'arrangement général de la construction du pont, ainsi que les détails; il faut ici remarquer que le pont ne possède que deux poutres principales pour deux voies et que, à part les barres (1), (2), (16) et (17), toutes les articulations possèdent un contreventement supérieur; ce dernier ne manque qu'aux extrémités, sur une longueur d'environ 10 mètres.

La fig. 219 indique, pour la moitié du treillis, les dimensions longitudinales de chaque partie.

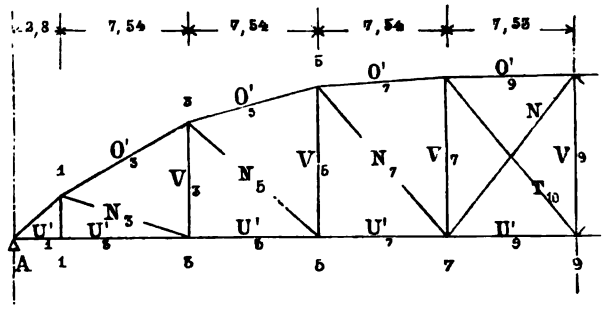
Fig. 219.



On a fait le calcul de ce système double en supposant que chacun des deux systèmes eût à supporter séparément les charges correspondantes, mais en ayant toutefois des nervures communes dans les deux systèmes, ensorte que la nervure supérieure doit être regardée comme remplacée par une courbe continue.

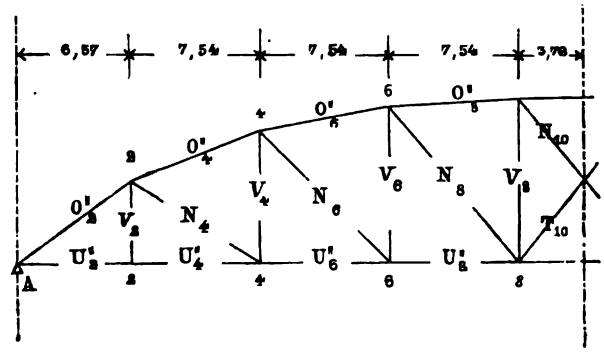
Les figures 220 et 221 représentent les deux systèmes, que nous désignerons par premier et second; le premier contient les articulations de nombre impair, le second les articulations de nombre pair.

Fig. 220.



Chacun de ces deux systèmes se calcule comme système isolé d'après nos formules 259)—283), pour une charge uniformément répartie sur une portion quelconque du pont. — Cette supposition fournit dans le premier système, pour l'articulation (1), une surcharge d'environ les deux tiers de celle des articulations adja-

Fig. 221.



centes, tandis que lorsque ces deux systèmes ne forment qu'un tout, ces articulations ont à supporter, comme les autres, à-peu-près la même charge totale (vu la diminution de longueur des panneaux extrêmes, seulement les $^7/_8$ de cette charge); cette différence a peu d'importance puisque les charges qui agissent sur les panneaux extrêmes n'ont que peu d'influence sur les valeurs des

moments de flexion. (Une inexactitude analogue a lieu, seulement en sens inverse, lorsqu'on suppose que toutes les articulations soient également chargées, lors même que les panneaux extrêmes ont une longueur plus faible.)

Nous désignerons les forces dans les nervures du premier système par O′ et U′ et celles du second par O″ et U″. Il n'est pas nécessaire de faire cette distinction pour les forces dans les barres (tant diagonales que verticales), puisque chaque barre n'appartient qu'à l'un des deux systèmes.

Il faut introduire des notations nouvelles pour les moments de flexion et pour les efforts tranchants. Nous avons nommé $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{B}'$ les valeurs qui se rapportent à *une* poutre; ces valeurs doivent encore être réduites sur chacun des systèmes et nous les nommerons $\mathfrak{M}''$ et $\mathfrak{B}''$; ainsi par exemple, $\mathfrak{B}''_5$ se rapporte à la fig. 220 et $\mathfrak{B}''_6$ à la fig. 221, tandis que pour la poutre entière du système double $\mathfrak{B}'_5 = \mathfrak{B}''_5 + \mathfrak{B}''_6$. — Dans le système double, nous avons $\mathfrak{M}''_m = \frac{1}{2}\mathfrak{M}'_m$, et dans un système triple $\mathfrak{M}''_m = \frac{1}{3}\mathfrak{M}'_m$.

183. D'après ce que nous avons vu, nous faisons le calcul du pont sur l'Elbe (voir la planche XV) en cherchant les forces qui agissent dans les treillis représentés dans les figures 220 et 221 et en supposant que chacun des deux systèmes ait à supporter la moitié du poids propre de la construction et la moitié de la surcharge.

Le mode de calcul reste, pour chaque système, le même que celui employé pour le pont sur le Colomak dans les **N°s. 179—181**, aussi ne donnerons-nous que la méthode suivant laquelle on trouve les *forces combinées dans les nervures.*

Mr. Schwedler a pris dans son calcul 200 quintaux pour poids propre et 280 quintaux pour la surcharge d'une articulation; en employant les mesures métriques, on trouve:

$$p = \frac{10000}{3{,}766} = 2653 \text{ kilogr.}, \quad k = \frac{14000}{3{,}766} = 3717 \text{ kilogr.}$$

et $q = p + k = 6370$ kilogr. Le pont étant à double voie et n'ayant que deux poutres principales, on aura comme moment de flexion maximum *au milieu de la poutre:*

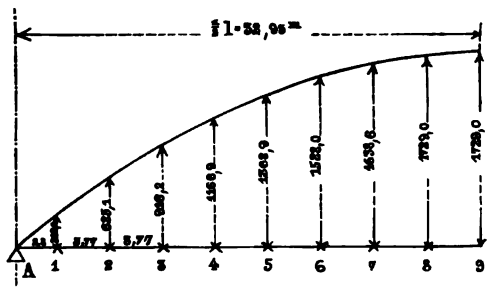
$$\text{Mmax } \mathfrak{M}' = \text{Mmax } \mathfrak{M} = \frac{q l^2}{8} = 3458{,}00 \text{ mètres-tonnes,}$$

donc:

$$\text{Mmax } \mathfrak{M}'' = 1729{,}0 \text{ mètres-tonnes.}$$

A l'aide de l'équation 174), on déterminera chaque $\mathfrak{M}'$, tant pour le premier que pour le second système; la fig. 222 renferme les résultats obtenus; les $\mathfrak{M}''$ de nombre impair se rapportent au premier et les $\mathfrak{M}''$ de nombre pair au second système.

Fig. 222.



Dans le système de Mr. Schwedler, max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ se trouve au milieu du pont pour une charge maximum uniformément répartie, donc (puisque les diagonales ne sont construites que pour résister à la tension) la fig. 140 est valable pour la moitié de gauche du pont, et pour trouver les *forces dans les nervures*, nous tirons du N°. **134**:

$$O_m \cos \beta = U_{m+2} \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \; . \quad 186)$$

et pour le cas qui nous occupe:

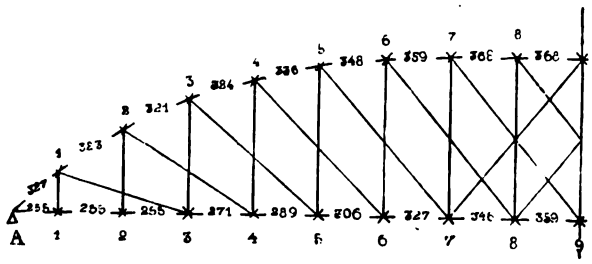
$$\left.\begin{aligned} O'_m \cos \beta &= U'_{m+2} = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \\ O''_{m-2} \cos \beta &= U''_m = \frac{\mathfrak{M}''_{m-2}}{\mathfrak{H}_{m-2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 285)$$

La table LVII renferme les résultats fournis par ces formules pour les forces dans les nervures, d'abord pour chacun des deux systèmes et ensuite, par la combinaison des forces qui agissent dans les mêmes parties des nervures, pour ceux du système double complet.

La table LVII ne nécessite pas d'autres explications, si ce n'est la remarque que les $\mathfrak{M}''$ sont prises dans la fig. 222 et les cos β dans la fig. 219.

Mr. Schwedler a obtenu les résultats représentés dans la fig. 223, en prenant une surcharge de 480 quintaux à

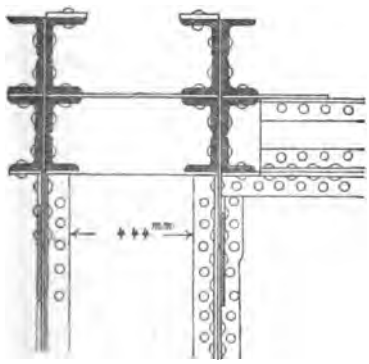
Fig. 223.



chaque articulation („Zeitschrift für Bauwesen“ de Berlin 1868, page 521—524).

184. Mr. Schwedler s'exprime en ces termes sur la construction des poutres principales représentées dans la planche XV: „La nervure supérieure est composée de 16 cornières, chacune de 5 pouces (127 mm) de longueur d'aile verticale (voir fig. 224), tandis que, de panneau en panneau, la variation de la section est produite par la variation des ailes horizontales. Toutes les cornières ont la longueur de deux panneaux et sont courbées aux articulations selon un cercle de 14 pieds (4 1/4 mètres) de rayon. Les joints sont disposés de façon que, à chaque point d'attache, 8 cornières sont continues et que les 8 autres, placées en croix, sont interrompues, ensorte que le couvrement complet du joint ne nécessite pas l'emploi de couvre-joints extérieurs ou de cornières de recouvrement mais qu'il est fait seulement par des doublures de 1/2 pouce (12,5 mm) d'épaisseur, placées entre les cornières. Le prolongement des doublures verticales sert en même temps à l'assemblage des verticales et à celui des diagonales.

Fig. 224.



„Aux articulations, les deux moitiés des nervures sont assemblées par une feuille de tôle horizontale; en outre, entre les nervures, un treillis vertical réunit les cornières de chaque

Table

Pont sur l'Elbe à Tangermuende.

Index m =	1	2	3	4
Premier système: $\mathfrak{M}''_m$	282,0^{ts}		916,2	
$\mathfrak{H}_m$	2,43^m		6,67	
$\frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m}$	116,27^{ts}		137,36	
$\cos \beta_m$	0,754		0,901	
$O'_m = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m} \cdot \frac{1}{\cos \beta}$	154,21^{ts}		152,45	
$U'_m = \frac{\mathfrak{M}''_{m-2}}{\mathfrak{H}_{m-2}}$	116,89^{ts} *)		116,89	
Second système: $\mathfrak{M}''_m$		623,1^{ts}		1166,9
$\mathfrak{H}_m$		4,86^m		7,94
$\frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m}$		128,22^{ts}		146,85
$\cos \beta_m$		0,840		0,947
$O''_m = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m} \cdot \frac{1}{\cos}$		152,64		155,07
$U''_m = \frac{\mathfrak{M}''_{m-2}}{\mathfrak{H}_{m-2}}$		128,22 *)		128,22
Les deux systèmes ensemble: $O_m = O'_m + O''_{m+1}$ ou $= O''_m + O'_{m+1}$	306,85^{ts}	305,09	307,52	314,79
$U_m = U'_m + U''_{m+1}$ ou $= U''_m + U'_{m+1}$	245,11^{ts}	254,11	245,11	265,58

LVII.

Calcul des forces dans les nervures.

5	6	7	8	9	Remarques.
1368,9		1638,6		1729,0	
8,79		9,41		9,41	
155,73		174,13		183,72	
0,975		1,0		1,00	
159,72		174,13		183,72	
137,36		155,73		174,13	*) $U_1 = U_3$.
	1528,0		1706,3		
	9,27		9,41		
	164,83		181,33		
	0,992		1,00		
	166,06		181,33		
	146,85		164,88		*) $U_2 = U_4$.
325,78	340,19	355,46	365,05	365,05 *)	*) $O''_{10} = O''_8$.
284,21	302,58	320,56	338,96	355,48*)	*) $U''_{10} = O''_8$.

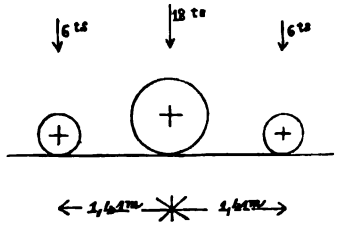
groupe et un latice horizontal assemble les cornières des deux groupes.

„Les verticales sont toutes égales et sont formées chacune de 4 cornières de 4 pouces (101 mm) de côté, et d'un demi pouce (12,5 mm) d'épaisseur, et renforcent la nervure supérieure à l'aide des feuilles de tôle horizontales de 3/8 pouce (11 mm) d'épaisseur, placées entre les nervures."

Dans le calcul des *entretoises* construites en poutres à parois pleines et chargées en 4 points par les poutrelles, il a été pris une locomotive à 3 axes distants de 12 pieds (3,76 mètres) et d'un poids de 260 quintaux soit 13 tonnes par axe.

La construction des *poutrelles* ou *pièces de pont* est remarquable (voir planche XV); elle se compose d'un simple treillis symétrique, où toutes les barres, qu'elles aient à supporter un effort de tension ou un effort de compression, sont composées de fers plats; cela est permis, vu la faible longueur de ces pièces; il faut toutefois remarquer qu'il existe au milieu des poutrelles un renfort transversal muni de cornières.

Fig. 225.



On a calculé les poutrelles en prenant une autre locomotive, qui, sans avoir un poids aussi fort, a un axe moteur du poids de 18 tonnes et dont les axes ne sont distants que de 2,82 mètres (voir fig. 225).

Le poids métallique d'une travée du pont à deux voies, de 65,90 mètres de portée (voir la remarque du N°. **182**), se compose de:

Tablier		58,1 tonnes
Poutres principales:		
Nervures	115,20	
Barres	38,30	
Contreventements supérieur et inférieur	17,70	
	———	181,30
	Total	239,4 tonnes

d'où résulte, par mètre et par voie:

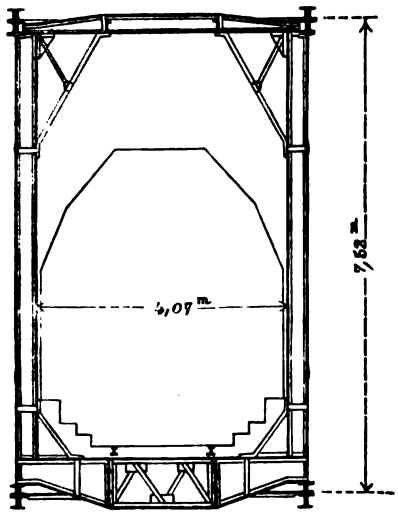
$$p' = 20{,}9\ l + 440 = 1817 \text{ kilogr.}$$

Dans le calcul statique, il a été pris comme poids total de la construction p = 2660 kilogr., charge qui n'est pas atteinte complétement, quand on ajoute au poids métallique ceux du matériel de voie et des madriers.

Il a été pris comme tension maximum dans les nervures, 100 quintaux par pouce carré, soit 731 kilogr. par cent. carré.

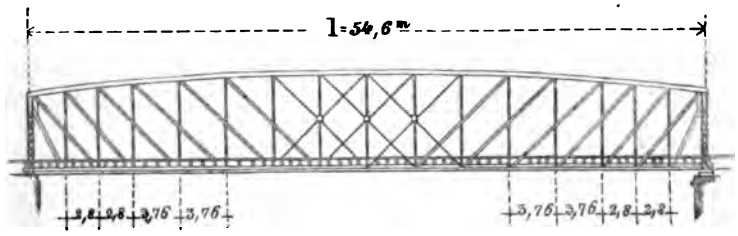
185. Le pont *sur l'Elbe à Meissen*, a une série de petites ouvertures et 3 grandes de 54,6 mètres de portée; Mr. Schwedler a été chargé du projet de la construction métallique, et l'a publiée en 1868 dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin. — Chacune de ces ouvertures est franchie séparément par deux poutres reposant librement sur leurs appuis; la nervure supérieure est faiblement cintrée; au milieu, la hauteur de la construction est à-peu-près le $^1/_7$ de la portée; sur les appuis, la construction n'a que la hauteur nécessaire pour l'établissement d'un contreventement supérieur, comme le représentent les fig. 226 et 227.

Fig. 226.



Cette disposition du treillis forme une transition entre les poutres droites et les poutres cintrées; le mode d'action des barres est analogue à celui de poutres droites; le calcul de ce pont se fera comme pour un système double, non-symétrique (voir les N^os^. **159** et **160** pour le pont sur le Danube à Ingolstadt); la seule différence provient de ce que la nervure supérieure est cintrée; il faudra donc employer les formules 195)—197^a^), 200) et 201) au lieu des formules 226)—230).

Fig. 227.



Comme surcharge il a été pris 2600 livres par pied, soit 4142 kilogr. par mètre; comme poids propre de la construction 1400 livres par pied, soit 2230 kilogr. par mètre; le poids de la *construction métallique* se compose de:

Tablier		18,9 tonnes
Poutres principales:		
Nervures	39,0	
Barres	32,9	
Contreventements supérieur et inférieur	16,8	
		88,7 „
Total		107,6 tonnes

donc pour 54,6 mètres de portée, par mètre et par voie:

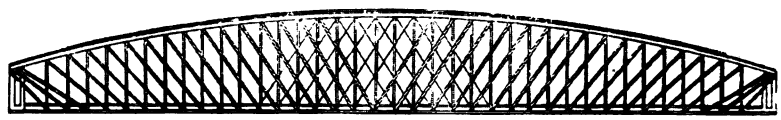
$$p' = 29{,}7\ l + 346 = 1970 \text{ kilogr.}$$

La charge maximum a été calculée de 100 quintaux par pouce carré, soit 731 kilogr., par cent. carré; pour le calcul du tablier, on a pris la locomotive représentée dans la fig. 225.

Le pont sur l'Elbe à Meissen offre la particularité que ses panneaux sont inégaux; les 3 panneaux extrêmes, de chaque côté du pont, n'ont que les $^3/_4$ de la longueur normale des autres panneaux; la position des barres extrêmes est ainsi plus favorable (moins inclinée) et l'aspect du pont n'en est pas moins agréable.

136. Une construction analogue à celle que nous venons de décrire, a été employée sur une grande échelle au *pont sur le Leck à Kuilenbourg.*

Fig. 228.



Ce pont a une ouverture de 150 mètres, une hauteur de poutre de 20 mètres et est formé d'un treillis triple, non-symétrique, comme le représente la fig. 228.

Le poids métallique du pont à deux voies est formé de:

Tablier		107,0 tonnes
Poutres principales:		
Nervures	1178,0	
Barres (diagonales et verticales)	570,0	
Contreventements supérieur et inférieur	245,0	
		1993,0 „
Total		2100,0 tonnes

et pour 150 mètres de portée, par mètre et par voie:

$$p' = 43{,}2\ l + 357 = 7000 \text{ kilogr.}$$

Dans ce pont, le tablier et les contreventements sont presque tous construits en acier fondu et les poutres principales exclusivement en fer laminé; dans le N°. **38**, nous avons déjà fait remarquer que l'acier ne doit encore être employé qu'avec précaution; c'est probablement pour cela que l'emploi d'acier fondu n'a pas eu lieu pour la construction principale; mais si l'on voulait faire usage d'acier fondu dans de grands ponts afin de rendre la construction plus légère, le but ne serait rempli que très-imparfaitement par l'arrangement mentionné, puisque le tablier et les contreventements n'y forment qu'une partie très-faible du poids total de la construction.

CHAPITRE SIXIÈME.

Ponts à poutres lattices.

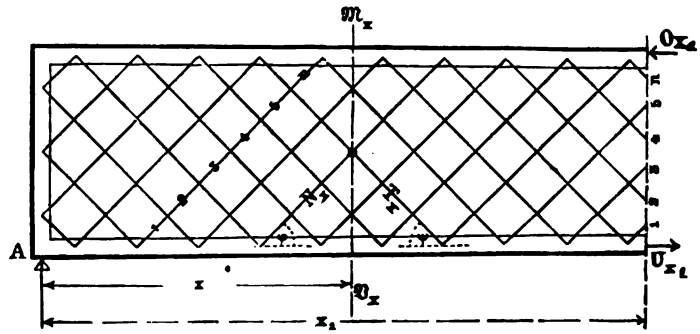
§ 19.

Théorie des ponts à poutres lattices.

187. Les *poutres lattices* rentrent dans le système de treillis symétriques multiples, et peuvent être calculées d'après les mêmes règles; les ponts à poutres lattices présentent toutefois des particularités qui, d'un côté, permettent une simplification, et d'un autre, nécessitent un complétement de la théorie des poutres en treillis.

Dans les poutres lattices, les barres inclinées, que nous nommerons *tiges du lattice* ou simplement *tiges*, s'entre-croisent plusieurs

Fig. 229.



fois avec d'autres tiges inclinées en sens contraire (voir fig. 229), ensorte qu'il en résulte des *mailles* réticulaires qui agissent comme une paroi pleine.

Les tiges, dont chacune est trop faible pour pouvoir supporter une pression un peu forte, sont reliées entre elles pour que le voilement de l'une d'elles ne puisse se faire en général qu'avec celui de toute la paroi.

Fig. 230.

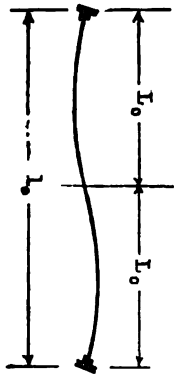
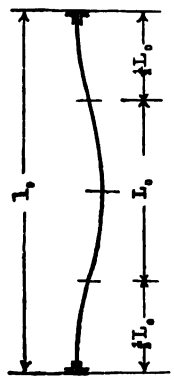


Fig. 231.



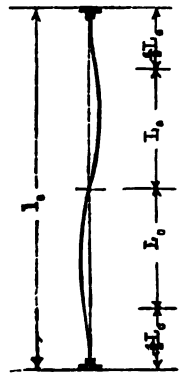
Les fig. 230 et 231 représentent les voilements les plus probables de la paroi; si l'on désigne par l_0 la hauteur totale, par L_0 la hauteur libre correspondant à un ploiement simple, ces deux figures montrent que $l_0 = 2\,L_0$; la longueur de la tige, elle-même plus grande vu son obliquité, est représentée par $l = 2L$; donc $L = {}^1/_2\,l$ est la longueur libre de la tige à introduire dans la formule 169), comme le montre l'équation suivante:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K\,\frac{\omega\,L^2}{\Theta}\right) = \mathfrak{B}_m \left(1 + K\,\frac{\omega\,l^2}{4\,\Theta}\right) \quad . \quad . \quad 285)$$

Remarque. On suppose le moment d'inertie pris perpendiculairement au plan de la paroi, puisque, dans ce sens, les tiges sont assez roides, étant toutes reliées entre elles à leurs points de croisement; le ploiement dans le plan du lattice sera traité dans le § 22.

Lorsque la construction est renforcée par des montants verticaux spéciaux, distants entre eux de d_0, il faut placer la valeur $\frac{1}{\cos\varphi}\,d_0$ au lieu de la longueur totale l de la barre, où φ indique l'angle des tiges du lattice avec l'horizon.

Fig. 232.



Lorsque de *hautes parois sont étrésillonnées* à leurs extrémités, de façon que la tangente à la courbe du ploiement près des nervures reste verticale, on peut se figurer la plissure de toute la paroi du lattice ayant lieu comme le représente la fig. 232, où l'on peut placer $L_0 = {}^1/_3\,l_0$; pour que ce cas arrive, il faut que l'encastrement soit à-peu-près complet.

Lorsque la forme des sections des tiges est la même, que ces dernières soient soumises à la pression ou à la tension, celles soumises à la tension concourent aussi à empêcher un voilement, ensorte que dans la formule 285), on peut doubler

le moment d'inertie Θ résistant à la flexion; pour ce cas nous aurons:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{2\,\Theta}\right) = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega l^2}{8\,\Theta}\right) \quad . \quad . \quad 286)$$

Il faut reconnaître que cette formule est assez arbitraire, car au lieu des courbes de voilement que représentent les fig. 230 et 231, il peut s'en produire d'autres, et ces cas indiqués ne sont qu'une moyenne entre les différentes possibilités de ploiement; il n'est pas non plus démontré que les tiges soumises à la tension résistent aussi bien au ploiement que les tiges soumises à la compression, lors même que les sections seraient de même valeur.

D'un autre côté, il faut reconnaître que la formule 286) tient bien compte des faits dont il est question et que, plus la fraction $\frac{1}{1 + K \frac{\omega l^2}{\Theta 8}}$ se rapproche de l'unité (ce qui correspond à une bonne construction), plus aussi les formules 285) et 286) deviennent exactes.

Remarque. Vu la grande différence que présentent les formules 286) et 169), il se peut qu'il soit nécessaire de modifier l'équation 169) lorsqu'on a un treillis multiple à barres réunies à leurs points de croisement; on commencera par ne prendre qu'une portion de la longueur totale, par exemple les $^3/_4$ ou les $^2/_3$ comme longueur libre L (ce que suppose du reste déjà l'équation 169) sous la dénomination „longueur libre"); d'ailleurs dans les constructions où les tiges tirées sont rigides, ces dernières résistent au ploiement des barres comprimées pourvu qu'elles soient réunies entre elles aux points de croisement.

188. Dans l'*emploi des formules* d'un treillis symétrique multiple pour des poutres lattices, on peut admettre une *variation continue des forces dans les nervures*, vu le faible éloignement des articulations (tandis que cette variation est brusque pour les articulations d'un treillis); on peut donc faire une coupe verticale en un lieu quelconque et nous supposerons que la section x soit faite chaque fois au milieu d'une barre N_x, pour déterminer les forces qui y agissent; comme le représente en partie la fig. 233, nommons:

$\mathfrak{M}_x$ le moment de flexion à la distance x de l'origine des coordonnées qui est ordinairement prise sur la culée en A.
$\mathfrak{B}_x$ l'effort tranchant à la distance x,
O_x la force dans la nervure supérieure à la distance x,
β_x l'angle correspondant avec l'horizon,
U_x la force dans la nervure inférieure à la distance x,
N_x la force dans la tige dont le milieu est atteint par la section x,
φ_x l'angle correspondant avec l'horizon,

Σ_x N sin φ la somme des composantes verticales de toutes les tiges atteintes par la section x et inclinées comme la tige N_x.

Σ_x T sin ψ la somme des composantes verticales de toutes les tiges atteintes par la section x et dirigées en sens opposé.

n le nombre des tiges atteintes par la coupe x, ou bien aussi le nombre des fragments produits sur une tige par le croisement des barres inclinées en sens opposé.

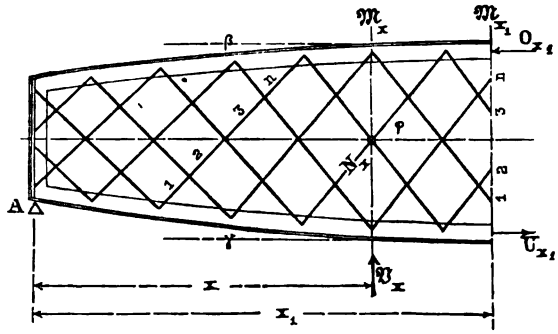
$\mathfrak{H}_x$ la distance des centres de gravité des nervures, ou la hauteur géométrique de la poutre à la distance x.

Ω la section de la nervure considérée.

ω la section de la tige considérée.

En employant ces notations, nous trouvons:

Fig. 233.



Pour les *nervures* d'une poutre lattice à forme de nervure quelconque, d'après les équations 198) et 199):

$$O_x \cos \beta = U_x \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \quad \ldots \ldots \quad 287)$$

Pour les *tiges*, d'après l'équation 196):

$$N_x \sin \varphi = \frac{1}{n} \left(\mathfrak{V}'_x = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \right) \quad \ldots \quad 288)$$

Les tensions et les pressions se trouveront par les équations 166)—168) et 285) ou 286); cette dernière équation s'emploiera lorsque la forme des sections des tiges inclinées en sens opposé sera la même. Les équations 287) et 288) se simplifient lorsque les nervures sont rectilignes, comme cela a ordinairement lieu pour des poutres lattices; dans ce cas on a,

Pour les nervures:

$$O_x = U_x = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 289)$$

Pour les tiges:

$$N_x \sin \varphi = \frac{1}{n} \mathfrak{B}'_x \quad \ldots \ldots \ldots \quad 290)$$

189. Comme pour des poutres à parois pleines, on emploie fort souvent, pour rendre la paroi de la poutre plus rigide, des *montants verticaux* qui doivent empêcher la plissure de la paroi; nous avons déjà fait remarquer que, par suite de l'emploi de ces montants verticaux, la longueur libre des barres est notablement diminuée, ensorte que dans l'équation 285), le quotient $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ se rapproche sensiblement de l'unité lorsque la distance des montants et l'épaisseur des tiges ont été choisies convenablement, ou bien aussi, les tiges comprimées peuvent être plus fortes, ensorte que la tension $\mathfrak{A}$ dans la barre soumise à la traction est au moins égale à la pression maximum $\mathfrak{B}$ de la tige symétrique pressée, inclinée en sens opposé. — Dans ces deux cas, les montants verticaux ne servent qu'à rendre la construction plus rigide et à répartir les poids du tablier.

Lorsqu'on emploie des montants verticaux, il arrive souvent que les barres comprimées ont à supporter une pression très-forte, qu'on calculera d'après l'équation 286) ou d'après l'équation 285); la pression $\mathfrak{B}$ serait notablement dépassée si *l'arrangement géométrique* de la poutre, produit par les montants verticaux, ne s'y opposait pas; la pression qui, vu le ploiement, ne peut pas être supportée par les barres pressées, est *transmise dans les montants verticaux*, ensorte que nous avons un *système combiné* semblable à celui que nous avons considéré dans les N^os. **142** et **143**.

Dans les *systèmes combinés à poutres lattices*, une simplification a lieu en ce que nous pouvons déterminer, comme pour tous les systèmes de poutres lattices, les forces dans les nervures d'après l'équation 287), tandis que, par analogie avec l'équation 181), nous obtenons pour les *tiges*, comme somme des composantes des forces:

$$\Sigma_x N \sin \varphi + \Sigma_x T \sin \psi = \mathfrak{B}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) \quad . \quad 291)$$

Les équations 202) et 203) servent à la détermination du rapport réciproque des forces N et T; nommons $\Sigma \omega_n$ la somme des sections des tiges soumises à la traction dans la section x,

$\Sigma\omega_t$ celle des barres comprimées; d'après l'équation 202, si nous employons l'équation 286), nous aurons:

$$\frac{\Sigma_x N}{\Sigma\omega_n} = \frac{\Sigma_x T}{\Sigma\omega_t}\left(1 + K\frac{\omega l^2}{8\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 292)$$

Si nous remarquons que dans les systèmes de poutres lattices, les tiges en sens opposé ont à-peu-près ou même exactement la même inclinaison, nous obtenons par l'équation 292):

$$\Sigma_x N \sin\varphi = \Sigma_x T \sin\psi \left(1 + K\frac{\omega l^2}{8\Theta}\right)\frac{\Sigma\omega_n}{\Sigma\omega_t} \quad . \quad . \quad 293)$$

$\Sigma_x N \sin\varphi$ et $\Sigma_x T \sin\psi$ peuvent donc être trouvés par l'équation 291).

Dans les équations 202), 292) et 293), il est supposé que la tension $\mathfrak{A}$ des tiges soumises à la traction est égale à la pression maximum $\mathfrak{B}$ des barres comprimées; on trouve donc la tension $\mathfrak{A}$ = pression $\mathfrak{B}$, en divisant la section des barres comprimées par la valeur $\left(1 + K\frac{\omega l^2}{8\Theta}\right)$ et en supposant la somme des forces $\Sigma_x N + \Sigma_x T$ également répartie sur la section réduite

$$\Sigma\omega_n + \Sigma\omega_t \quad \frac{1}{1 + K\frac{\omega l^2}{8\Theta}}$$

La tension ainsi trouvée ne donne qu'une moyenne pour toutes les barres rencontrées par la coupe x, mais elle donne une valeur aussi exacte que possible pour la barre dont le milieu est atteint par la section x; nous aurons donc:

$$N_x : \omega_n = \left\{\Sigma_x N + \Sigma_x T\right\} : \left\{\Sigma\omega_n + \Sigma\omega^t \frac{1}{1 + K\frac{\omega l^2}{8\Theta}}\right\} \quad . \quad . \quad 294)$$

La combinaison des équations 291) et 294), si l'on remplace $\frac{1}{1 + K\frac{\omega l^2}{8\Theta}}$ par sa valeur $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$, donne:

$$N_x \sin\varphi = \frac{\omega_n}{\Sigma\omega_n + \Sigma\omega_t\left(\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}\right)}\left\{\mathfrak{B}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\right\} \quad 295)$$

Lorsque les barres comprimées sont plus fortes que les tiges soumises à la traction dans un rapport exprimé par c, en suppo-

sant toutefois que les dimensions des barres qui augmentent vers les culées ne varient pas trop brusquement, nous aurons:

$$\Sigma\omega_n + \Sigma\omega_t \left(\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}\right) = \frac{n\omega_n}{2} \cdot \frac{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}} \quad . \quad 296)$$

et d'après l'équation 295):

$$N_x \sin\varphi = \frac{1}{n}\left(\mathfrak{B}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\right)\frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \quad 297)$$

D'après les suppositions que nous avons faites jusqu'ici, chaque tige soumise à la tension et chaque barre comprimée qui se croisent à une distance à-peu-près égale x), ont ensemble à supporter la force $\frac{2}{n} \cdot \mathfrak{B}'_x$; nous aurons donc pour les barres comprimées:

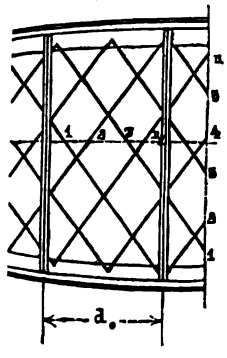
$$T_x \sin\psi = \frac{1}{n}\left(\mathfrak{B}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta)\right)\frac{2\,c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad 297)$$

Remarque. Dans les équations 292)—297), N indique une tension, T une pression; si les tiges N étaient comprimées et les tiges T soumises à la tension, il faudrait remplacer dans les équations 292)—297) les valeurs N et φ par les valeurs T et ψ.

Les forces dans les nervures se modifient, car les tiges soumises à la traction ont à supporter une plus forte charge que les barres soumises à la compression; c'est pourquoi la nervure soumise à la traction fatigue moins que la nervure comprimée, puisque la différence des composantes horizontales des forces dans les barres $\Sigma N \cos\varphi - \Sigma T \cos\psi$ doit être supportée par la différence des forces dans les nervures (ou par les composantes horizontales de ces mêmes forces). —

Cette modification des forces dans les nervures est peu grande lorsque la valeur $\frac{c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ ne diffère pas trop de l'unité.

Fig. 234.



D'autre part, la *différence* des composantes *verticales* des forces dans les barres doit être supportée par les *barres* ou *montants verticaux*, puisque l'on suppose que chaque système combiné soit formé de deux systèmes non-symétriques, à barres inclinées en sens opposé.

Nommons

V_x la force dans un montant vertical voisin de la coupe x,

d_0 la distance de deux montants verticaux,

n le nombre des tiges rencontrées par la coupe *verticale* x,

n′ le nombre des tiges rencontrées par une coupe *horizontale* entre deux montants verticaux, c'est-à-dire sur la longueur d_0; on obtient par une coupe x faite sur le montant vertical et qui indique en même temps l'abscisse moyenne des milieux des tiges:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{n'}{n}\left(N_x \sin\varphi - T_x \sin\varphi\right) \\ V_x &= \frac{n'}{n}\left(\mathfrak{B}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma\right)\frac{\mathfrak{B} - c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 298)$$

Le rapport $\frac{n'}{n}$ est ordinairement exprimé par celui de $d_0 : \mathfrak{H}$. — Pour les montants verticaux, il faut employer l'équation 169); pour déterminer le rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$, il faut ordinairement y prendre comme longueur libre L la hauteur même de la poutre, vu que les verticales, n'étant pas libres à leurs extrémités, ont d'un autre côté à supporter des forces latérales qui tendent à produire une flexion et qui proviennent des tiges elles-mêmes.

Les équations 296)—298), et l'équation 287) valable pour tous les systèmes de poutres lattices, se simplifient comme suit, pour des *poutres rectilignes, à nervures horizontales et munies de montants verticaux.*

$$O_x = U_x = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 299)$$

$$N_x \sin\varphi = \frac{2}{n}\mathfrak{B}'_x \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; 300)$$

$$T_x \sin\psi = \frac{2}{n}\mathfrak{B}'_x \frac{c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; 301)$$

$$V_x = \frac{n'}{n}\mathfrak{B}'_x \frac{\mathfrak{B} - c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; . \; 302)$$

Le rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ est donné par l'équation 286), où il faut placer $tl = d_0 : \cos\varphi$. — La tension $\mathfrak{A}$ dans les tiges, trouvée par l'équation 300), est égale à la compression $\mathfrak{B}$ trouvée par l'équation 301), pourvu que les montants verticaux soient construits assez forts pour pouvoir supporter la force V calculée d'après l'équation 302, sans avoir eux-mêmes à travailler sous une tension plus grande que celle ci-dessus indiquée de $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

190. Nous classifions les ponts à poutres lattices comme suit:

1) Ponts à poutres lattices, *à barres semblables tant pressées que irées, sans emploi de montants verticaux.*

Ces poutres sont ordinairement munies de tiges rigides en forme de T, de cornières ou d'autres fers façonnés.

2) Ponts à poutres lattices, *à barres plates*, avec emploi *de montants verticaux.*

Le calcul doit être fait d'après les règles données dans le N°. **189.**

3) Ponts à poutres lattices, à *barres rigides (pressées) et à tiges (tendues) en fers plats.*

Cette dernière classe de ponts se rapproche déjà beaucoup des ponts en treillis; ils s'en distinguent principalement en ce qu'on suppose, dans les ponts à poutres lattices, un changement continu de la force dans la nervure (équation 287); la longueur libre des tiges se détermine d'après l'équation 285) (qui, suivant les cas, est aussi valable pour les poutres en treillis).

On pourra toujours faire rentrer toutes les poutres lattices dans une de ces trois classes. Dans la 3me classe, il n'a pas été fait de différence, qu'on ait employé des montants verticaux ou non, parce qu'on a supposé, pour les barres rigides (comprimées), que le rapport $\frac{c\,\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ se rapproche de l'unité, et alors le montant vertical n'a aucune force de barre à supporter; si, au contraire, les barres comprimées ne possédaient pas une rigidité suffisante, il faudrait employer les règles du N°. **189**, ce qui, pour cette classe, n'est ordinairement pas nécessaire.

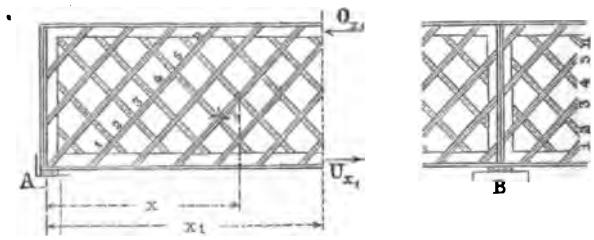
§ 20.

Ponts à poutres lattices, à barres semblables, sans montants verticaux.

191. Les règles du N°. **181** sont applicables aux ponts à poutres lattices qui n'ont pas de montants verticaux; de plus, lorsque les barres sont construites semblables, leur longueur libre peut être déterminée d'après l'équation 286).

Le calcul a lieu d'après les équations 287) et 288), qui, pour des poutres lattices à nervures rectilignes (voir fig. 235), se simplifient et deviennent les équations simples 289) et 290).

Fig. 235.



La résistance de ces parois lattices dépend en général de la dimension ou de la rigidité des barres soumises à la compression; il faut donc veiller à ce que le rapport $\frac{\omega}{\Theta}$ des sections des barres soit pris aussi favorablement que possible. En général, la forme en T remplira le mieux le but qu'on se propose. — Pour ces ponts, il est avantageux que le tablier soit placé à la partie inférieure des poutres, puisque alors la moitié du poids du tablier (y compris la surcharge) doit être reportée sur la nervure supérieure par le système des barres; par cet arrangement, les barres comprimées sont un peu déchargées, tandis que les barres soumises à une tension généralement moins forte auront à supporter un surcroît de tension. — Vu la liaison intime des barres, on peut admettre que le poids du tablier qui vient à agir en un point donné se répartit sur une assez grande longueur, ensorte que la charge uniformément répartie, qu'on suppose agir sur la longueur λ, se répartit également sur toutes les barres comprises dans cet espace.

Les barres rencontrées par la coupe verticale x, qui, pour une poutre droite, doivent supporter la force $\mathfrak{B}_x$, ont à supporter la moitié de la charge du tablier sur la longueur $\mathfrak{H}$. cotang φ, c'est-à-dire, lorsque les tiges sont inclinées à 45° et s'il existe deux poutres principales, elles ont à supporter ensemble, pour chaque paroi, un poids $= \frac{1}{4}\,\mathfrak{H}\,(k + F)$. Si ce poids fournit une grande partie de l'effort tranchant $\mathfrak{B}'_x$, les barres comprimées seront déchargées, tandis que les tiges soumises à la traction seront d'autant plus chargées. L'avantage d'un tablier situé à la partie inférieure des poutres se fait donc sentir vers le milieu du pont, où les valeurs de $\mathfrak{B}'_x$ sont faibles.

Le cas contraire arrive lorsque le tablier est situé à la partie supérieure des poutres; dans ce cas, il faut veiller à ce que les barres du milieu possèdent encore une rigidité suffisante.

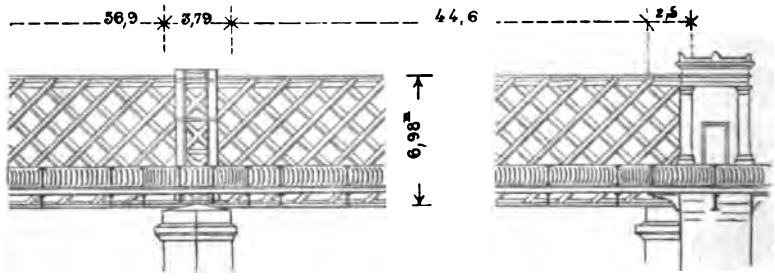
Les considérations précédentes peuvent recevoir leur application dans la répartition des profils de barres de diverses sections.

Il existe quelques ponts où des barres en fers plats sont employées sans montants verticaux, par exemple l'un des plus anciens ponts à poutres lattices sur le canal royal à Dublin, construit en 1845; il s'y présente un voilement dangereux, facile à comprendre, vu la grande compression que la paroi du lattice doit supporter. Lorsqu'on ne veut pas employer de montants verticaux, on ne se sert plus exclusivement de fers plats; le progrès fait dans la fabrication des fers laminés permet l'emploi de cornières, de fers en T ou d'autres fers façonnés qui présentent une grande résistance au voilement; quant à la légèreté, ces ponts de la première classe

peuvent concourir avec les ponts de quelque système que ce soit; le prix par tonne est aussi convenable, si la construction ne réclame pas l'emploi de fers façonnés trop chers; des barres fortes et de grande longueur peuvent être construites de plusieurs pièces au moyen de fers plats et de cornières.

192. Une des premières constructions sur une grande échelle de poutres lattices à barres rigides a été faite de 1857 à 1859 sous la direction de Mr. de Ruppert pour *les ponts sur l'Eipel et le Gran*, dont une publication détaillée a été faite dans la collection de constructions de ponts métalliques de Mr. L. de Klein, Stuttgart 1860.

Fig. 236.



Le pont sur l'Eipel à Szobb, esquissé dans la fig. 236, présente les dimensions longitudinales suivantes:

2 ouvertures extérieures à 44,60^m = . . .	89,20
1 ouverture centrale	56,90
2 piliers intermédiaires à 3,79^m	7,58
Total entre les culées	153,68^m

tandis que la longueur totale de la construction métallique est de 158,68^m.

Les sabots des soutiens sont à-peu-près aussi larges que les piliers eux-mêmes; comme portée dans-œuvre effective, nous avons 57,22^m et 44,92^m, et d'après les règles du N°. **16**, nous devons encore ajouter la moitié de la largeur de la surface d'appui, soit 1,73^m et nous obtenons ainsi comme portée entre les soutiens, pour l'ouverture centrale b = 58,96^m, pour les ouvertures extérieures a = 46,65^m, ensorte que le rapport a : b est à-peu-près celui de 4 : 5. Le poids métallique est de 8 quintaux douaniers par pied courant autrichien, soit de 1266 kilogr. par mètre et par voie; ce poids a été un peu dépassé dans l'exécution, ensorte que si l'on ajoute le poids du tablier, y compris les madriers, on peut prendre comme poids total p = 1900 kilogr. par mètre

et par voie. — Il a été calculé pour la surcharge 24 quintaux douaniers par pied courant, soit k = 3800 kilogr. par mètre et par voie; dans la table XXII, nous placerons donc $\frac{p}{k} = \frac{1900}{3800} = \frac{1}{2}$ et $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$; les pressions sur les appuis et les moments de flexion principaux sont déjà calculés dans cette table et sont représentés graphiquement dans la planche V. Dans cette dernière représentation, nous voyons que les efforts tranchants maxima ont lieu à droite de la pile B, lorsque les deux premières ouvertures sont chargées; il faut déduire de la somme A + B des pressions sur les appuis, la charge de la première ouverture [en employant l'équation 108a)] et nous obtenons pour l'effort tranchant maximum à droite de l'appui A, d'après la table XXII:

$$\left.\begin{aligned} \max \mathfrak{B} &= (0{,}2883 + 1{,}0046)\, q\, b - a\, q \\ &= 5700\ [(1{,}333 \times 58{,}95) - 44{,}42] \text{ kilogr.} \\ &= 190{,}84 \text{ tonnes.} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ \text{I.}$$

Les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{B}$ s'obtiendront d'une manière analogue à l'aide de la table XXII; la détermination préalable des pressions sur les appuis a été faite au moyen des équations 108) et 109).

193. Le pont sur l'Eipel et d'autres ponts construits dans le même genre sont surtout remarquables, en ce que *les barres sont formées de fers en Ω*, comme le montre la figure 237, qui représente la demi-coupe d'une des barres les plus fortes. Supposé que la difficulté plus ou moins grande du laminage des fers soit vaincue, c'est le moment d'inertie Θ, comparé avec la surface de coupe de la barre, qui fera donner la préférence à un profil quelconque, comme l'indiquent les équations 169), 285) et 286).

Dans le calcul des plus fortes barres du pont sur l'Eipel, nous supposons le cas représenté par la fig. 232, où l'on admet une grande rigidité près des nervures tant inférieure que supérieure; dans l'équation 286) nous pouvons donc placer L = 1/3 I et nous obtenons:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega l^2}{18 \,.\, \Theta}\right) \quad . \ . \ . \ . \ \text{II.}$$

Les valeurs contenues dans cette équation sont: l = 20′ = 6,32 m, ω = 47,3 cent. carrés; K = 0,00008 d'après la table XI; nous avons déterminé le moment d'inertie Θ d'après la méthode graphique indiquée au N°. **17** et nous l'avons trouvé égal à 221 c4. — La fig. 237 est une esquisse de cette dernière méthode employée, construite sur une plus grande échelle; les notations et le procédé sont indiqués plus en détail dans le N°. **17**.

En remplaçant ces dernières valeurs dans l'équation II., nous obtenons:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} = 1 + 0{,}38 = 1{,}38 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Fig. 237.

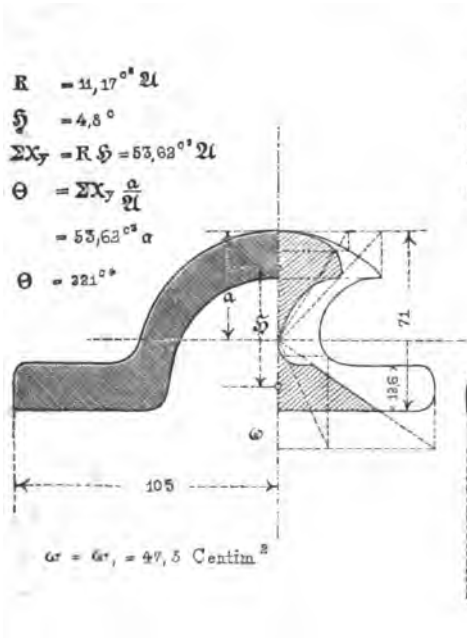
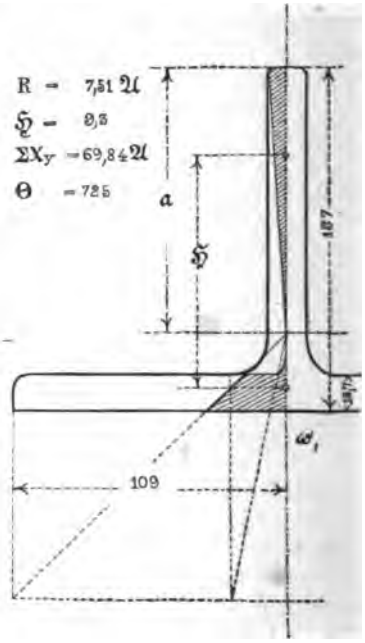


Fig. 238.



On obtient la pression moyenne des barres en plaçant dans l'équation 290) n = 8; pour déterminer la force maximum dans les barres situées à droite de l'appui B, il faut placer dans l'équation I., max $\mathfrak{B}'$ = max $\mathfrak{B}$ = 190,83 tonnes et sin φ = 0,707 et nous obtenons:

$$\max N = 33717 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{N}{\omega} = \frac{33717}{47{,}3} = 713 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation II., nous obtenons enfin:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}\, 713 = 984 \text{ kilogr.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VI.}$$

Bien que nous ayons employé la ligne de ploiement favorable indiquée par la fig. 232, nous obtenons encore une valeur assez

grande pour la pression maximum, ce qui ne met pas d'opposition à l'emploi de barres rigides; car pour un fer en ⊤ de même surface et en employant le même mode de calcul, nous avons trouvé un moment d'inertie de 725^{c4}, (voir la fig. 238); pour ce profil nous avons donc $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} = 1 + 0{,}38 \,.\, \frac{221}{725} = 1{,}116$ et l'on aurait obtenu $\mathfrak{B} = 1{,}116 \times 713 = 796$ kilogr., résultat tout-à-fait satisfaisant.

On pourrait croire, d'après le résultat favorable obtenu pour des fers en ⊤, que l'équation II. est fondée sur des considérations trop avantageuses; mais il faut remarquer que les barres du pont sur l'Eipel travaillent en réalité sous une pression beaucoup plus grande que celle donnée par l'équation ci-dessus II.

Sur les piliers intermédiaires, comme le montre la fig. 236, on a employé des constructions de rigidité en fonte, reliées à leur partie supérieure par une poutre en fer forgé, lesquelles encadrent le système lattice en l'empêchant de se déverser; les armatures verticales sur les piles intermédiaires, contenus dans le système lui-même et représentés dans la fig. 235 n'ont pas été employés; aussi, dans l'épreuve du pont qui coïncidait avec la charge maximum mentionnée plus haut, la réaction totale sur les appuis devait-elle être supportée en entier par 6 barres environ; on peut se convaincre par un calcul très-simple que la pression était à la limite de celle qui est encore admissible.

Dans de nouveaux projets, il ne faut employer la courbe de voilement représentée dans la fig. 232 qu'avec beaucoup de circonspection; en cas de doute, celle de la fig. 231 est préférable et suivant les cas, il vaut mieux prendre une moyenne entre ces deux résultats.

194. En même temps que le pont sur l'Eipel, une série de ponts à poutres lattices furent construits sous la direction de Mr. Hornbostl pour le chemin de fer de Salzbourg à Vienne; on employa des deux côtés des fers en ⊤; ces ponts sont remarquables en ce qu'on n'a pas contre-balancé la variation des forces par un changement de la section des barres elles-mêmes, mais par une *variation graduelle de l'éloignement des mailles*, en faisant usage du même profil de barre sur toute la longueur du pont. La construction est bien simplifiée quant au matériel employé, toutefois cette construction ne se laisse appliquer convenablement que lorsque le tablier est situé à la partie supérieure des poutres. — Ces ponts se calculent exactement comme d'autres ponts de cette classe; il n'y a que le nombre n qui varie avec la distance à la culée.

195. Comme exemple d'un pont à poutres lattices à barres rigides, de portée moindre, nous prendrons le pont sur la Blau

à Ehrenstein, établi pour le chemin de fer d'Ulm à Sigmaringen, et représenté dans la planche XVI.

Ce pont est biais, les poutres ont 19,8 mètres de longueur et 19,4 mètres de portée entre les appuis. Le système lattice est triple, à barres rigides, en forme de ⊤; la longueur diagonale des mailles est de 1,076 mètre, la distance des entretoises est double, donc de 2,152 mètres; entre les entretoises, construites en poutres à parois pleines, se trouvent des poutrelles en fers à double ⊤, ensorte que la surface inférieure du patin du rail est de 0,63 mètre plus élevée que la surface inférieure de la nervure de la poutre principale.

Ces entretoises ont 0,54 mètre de hauteur; l'épreuve du pont n'a montré qu'une oscillation insignifiante de la paroi du lattice, qui, au-dessus des entretoises, est libre sur une hauteur de 1,44 mètre, et qui n'est rendue rigide que par la résistance transversale des barres elles-mêmes. Le poids métallique, conformément aux dimensions contenues dans la planche XVI, est:

Poutres principales:

Nervures, y compris les armatures extrêmes	9200	
Barres	4200	
		13400
Contreventement		220
Entretoises		7300
Poutrelles		2640
		23660 kilogr.

Le poids métallique pour une longueur $l = 19{,}4$ mètres, est donc par mètre courant:

$$p' = 36{,}0\, l + 500 = 1200 \text{ kilogr.}$$

Dans le *calcul* de ce pont, il a été pris comme surcharge celle qui a servi de base à la table XVII[a]; nous en tirons pour une portée de 20 mètres:

$$k = 4660 \text{ kilogr.}; \qquad \frac{k + k'}{2} = 5360 \text{ kilogr.}$$
$$k^1 = 6050 \text{ kilogr.}$$

En ajoutant au poids métallique p' celui du tablier et des madriers, de 300 kilogr. par mètre, nous aurons:

$$p = 1500 \qquad q_0 = \frac{k + k'}{2} + p$$
$$q = 6160 \qquad {}_{n} = 6850$$

et nous obtiendrons pour 19,4 mètres, de portée:

Moment de flexion maximum au milieu de la poutre:

$$\text{Mmax } \mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} = 290{,}0 \text{ mètres-tonnes.} \quad \text{I.}$$

Effort tranchant maximum sur la culée:

$$\text{Mmax } \mathfrak{B} = {}^1/_2\, q_0\, l = 66{,}44 \text{ tonnes} \quad \text{II.}$$

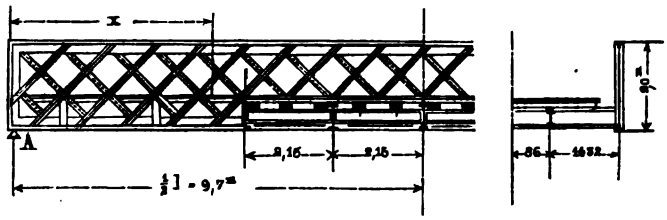
Effort tranchant maximum au milieu de la poutre:

$$\max \mathfrak{B}_{1/2\,l} = \frac{k^1\,l}{8} = 14{,}67 \text{ tonnes} \quad \text{III.}$$

Pour *une* poutre, il faut réduire ces valeurs de moitié et nous obtenons d'après l'équation 289), pour les *nervures au milieu de la poutre:*

$$O = U = \frac{\max \mathfrak{M}'}{\mathfrak{H}} = \frac{145{,}000}{1{,}94} = 64{,}7 \text{ tonnes} \quad \text{IV.}$$

Fig. 239.



La section qui doit supporter cette force dans les nervures, se compose de:

3 feuilles horizontales, chacune de 200 mm de longueur, et de 10 mm d'épaisseur,	60,0	cent.	carrés,
2 cornières, chacune de 90 mm de longueur d'aile, et de 11,5 mm d'épaisseur,	38,7	„	„
1 table verticale 286 mm de longueur, et de 11 mm d'épaisseur,	31,5	„	„
	130,7	„	„
à déduire:			
2 rivets au travers des feuilles horizontales $2 \times 2{,}0 \times 4{,}1 =$	16,4	„	„
reste	113,8	„	„

d'où résulte comme tension maximum dans les nervures, $\mathfrak{A} =$ 656 kilogr.

La force maximum *dans les barres* s'obtient à l'aide de la formule 290):

$$\left.\begin{aligned} N \sin \varphi &= \frac{1}{n}\,\mathfrak{B}' \\ N &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{0{,}707} \cdot 33220 = 15662 \text{ kilogr.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{V.}$$

La section ω de la plus forte barre, est de 31 cent. carrés, donc:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{N}{\omega} = 502 \text{ kilogr.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VI.}$$

la longueur libre d'une barre est de 1,4 mètre, la hauteur de la section de 0,1 mètre, donc le rapport de la table XIV $\frac{L}{H} = 14$, d'où résulte $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} = 1{,}2$; la *pression* maximum serait donc de 602 kilogr. (Le moment d'inertie ne doit pas être doublé comme le suppose l'équation 286), vu le petit nombre des points de croisement.)

Dans le calcul de la *tension maximum* des barres, il faut encore faire déduction de deux logements de rivets, ensorte que la section est réduite à 25 cent. carrés; la tension se calcule à l'aide de l'équation V.:

$$\mathfrak{A} = \frac{N}{\omega} = \frac{15662}{25} = 627 \text{ kilogr.} \; . \; . \quad \text{VII.}$$

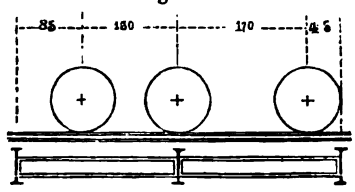
Les tensions et les pressions des barres sont encore modifiées par le report du poids du tablier sur les nervures. Pour une double longueur de maille, ce poids est égal à 2,15 (k' + F), où il faut placer k' = 6050, F = 500 + 300 = 800 kilogr.; cette portion de poutre est donc chargée de 7364 kilogr., dont la moitié est transmise dans 4 barres; l'une d'elles supporte donc 921 kilogr., charge qui augmente ou qui réduit la force agissant dans la barre, de $921 \cdot \frac{1}{\sin \varphi} = 1300$ kilogr.; la réduction de cette force a lieu pour les barres comprimées et l'augmentation pour les barres soumises à la tension; la valeur N dans l'équation V., devient pour ce cas égale à 16962 kilogr. et la tension maximum dans les barres est de $\frac{16962}{15662}\ 627 = 677$ kilogr.

Cette modification de la force dans les barres est surtout appréciable au milieu du pont; si l'on remplace la valeur $\mathfrak{B}$ dans l'équation III. ci-dessus, il résulte de l'équation 290):

$$\left.\begin{aligned} N \sin \varphi &= \frac{1}{n}\,\mathfrak{B}' = \frac{1}{n} \cdot 7335 \text{ kilogr.} \\ N &= 3458 \text{ kilogr.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad \text{VIII.}$$

à ces 3458 kilogr. il faut ajouter les 1300 kilogr. qui résultent du report des poids du tablier; la section d'une barre, au milieu du pont, est de 24 cent. carrés et après déduction de 2 rivets, de 19,6 cent. carrés, d'où résulte comme tension maximum au milieu de la poutre $\frac{3458 + 1300}{19{,}6} = 243$ kilogr. Les barres soumises à la compression ne sont que peu chargées au milieu du pont, puisqu'il faut faire déduction de 1300 kilogr. pour la force qui agit dans les barres.

Fig. 240.



La fig. 240 indique la position la plus défavorable de la locomotive quant au chargement des *entretoises*; d'après cette figure, l'entretoise du milieu est chargée de:

$$12000 \left(1 + \frac{85 + 45}{215}\right) = 19265 \text{ kilogr.}$$

et, pour chaque articulation chargée, P, est égale à 9632 kilogr.; il faut encore ajouter le poids du tablier $P_{,,} = 300 \cdot 2{,}15 = 630$ kilogr.: on a donc $P = P_{,} + P_{,,} = 10262$ kilogr.; d'après la table XXVIII, fig. 95, le moment de flexion $\mathfrak{M}$ pour un point chargé est de:

$$\mathfrak{M} = P\lambda = 10262 \times 1{,}43 = 14{,}675 \text{ kilogrammètres} \quad . \quad \text{IX.}$$

Ce moment, remplacé dans l'équation 158), fournit comme *tension maximum dans les nervures des entretoises*:

$$\mathfrak{A} = 14675 \frac{H}{\mathfrak{H}_0^{\,2}} \frac{1}{(\Omega + \frac{1}{6}\,\delta\,\mathfrak{H}_0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{X.}$$

D'après la planche XVI, il faut placer dans cette équation $H = 53{,}6°$, $\mathfrak{H}_0 = 49°$, $\delta = 9{,}0$, tandis que la section des nervures ω se compose:

d'une table horizontale 20,0 × 1,0 = . .	20,00	cent.	carrés,
de 2 cornières, chacune de 9,0° de longueur d'aile et de 1,15° d'épaisseur	38,60	„	„
	58,7	cent.	carrés.
à déduire, pour 2 rivets	7,3	„	„
reste	51,5	cent.	carrés.

Ces valeurs, remplacées dans l'équation X., fournissent comme tension maximum dans les nervures $\mathfrak{A} = 558$ kilogr.

§ 21.

Ponts à poutres lattices, à barres en fers méplats et à montants verticaux.

196. A l'époque où l'on ne construisait pas encore des ponts à poutres lattices à grandes mailles et à barres rigides, on cherchait à rendre rigide la construction, composée en entier de fers plats, à l'aide d'armatures ou de montants verticaux qui servaient ordinairement à l'attache du tablier. Lorsque la distance entre les montants verticaux est notablement plus faible que la hauteur du lattice, toutes les barres comprimées ont à subir à-peu-près également l'influence de ces verticales; les règles données dans le N°. **189** sont directement applicables, la distance d_0 des verticales étant décisive pour la longueur libre des barres; dans l'équation 206) on placera $l = d_0 \frac{1}{\cos \varphi}$. Il résulte de ce que nous venons de voir, que la rigidité des barres comprimées est d'autant plus grande que les montants verticaux sont plus rapprochés, car non-seulement la longueur libre de la barre est diminuée, mais aussi le report d'une partie de la force des barres sur les verticales se fait d'une manière plus uniforme. — Pour que les montants verticaux n'absorbent pas trop de matière, il est nécessaire que leur section perpendiculaire à la paroi du lattice soit d'une hauteur aussi grande que possible; l'arrangement que montre la fig. 241, où les cornières employées sont assemblées à la paroi avec leurs ailes de faible largeur et fournissent ainsi avec leurs autres ailes une hauteur h assez notable, est moindre que l'arrangement indiqué par la fig. 242, lequel, à poids égal, présente un moment de résistance beaucoup plus grand contre le déversement de la paroi, en même temps qu'une plus grande surface pour l'attache des entretoises.

Fig. 241.

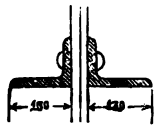
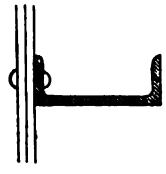


Fig. 242.



Dans la plupart des cas, les ponts à poutres lattices dont nous parlons ont des nervures horizontales rectilignes; donc — supposé un emploi rationnel des montants verticaux, — on peut employer en général les formules 299)—302); dans la formule 302), il faut appliquer l'équation 169) pour la détermination du rapport $\mathfrak{W} : \mathfrak{W}_m$, mais dans les formules 300) et 301), l'équation 286). Dans ces deux cas, puisqu'on suppose les barres rectangulaires, la table XIV peut être employée avec avantage.

Remarque. Si l'on veut se servir de la table XIV pour l'équation 286), il faut remplacer $1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}$ par $1 + K \frac{\omega\, {}^1/_2\, l^2}{2 \Theta}$ et les valeurs $\mathfrak{B}_m : \mathfrak{B}$ obtenues par la table XIV doivent subir une correction par l'emploi du double moment d'inertie; par exemple $\frac{1}{1{,}86} = \frac{1}{1 + 0{,}86}$ fournit, si l'on prend le double moment d'inertie, $\frac{1}{1 + 0{,}43} = \frac{1}{1{,}43}$.

Si l'on détermine N_x d'après l'équation 300 pour une barre soumise à la tension, et T_x d'après l'équation 301) pour la tige comprimée symétrique, les équations

$$\mathfrak{A} = \frac{N_x}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 303)$$

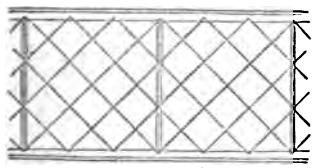
et:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} \cdot \frac{T_x}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 304)$$

donnent chacune, pour $\mathfrak{A}$ ou pour $\mathfrak{B}$, des valeurs égales, puisque nous avons supposé le même maximum d'effort des barres tant pressées que comprimées, vu l'influence exercée par les montants verticaux.

197. La méthode que nous venons d'indiquer se modifie lorsque la distance des montants verticaux est à-peu-près égale à la hauteur du lattice ou même un peu plus grande. Dans de pareils cas, comme le montre la fig. 243, les barres qui forment la diagonale du panneau compris entre les nervures et les verticales, ne peuvent pas supporter un effort de compression aussi grand que les autres barres, tandis que la diagonale opposée, soumise à la traction, travaille davantage; pour chaque paire de barres, on pourrait développer le rapport $\mathfrak{B} : \mathfrak{B}_m$, et l'effort que supportent les barres serait donné par celui des tiges diagonales qui ont à supporter la tension maximum égale à la pression maximum; mais il faut ajouter qu'un changement de forme de tout le lattice produit un effort extraordinaire dans les diagonales tirées, dont la tension est encore plus élevée que l'effort calculé d'après la formule 300). — Des systèmes pareils se trouvent dans des conditions défectueuses qui doivent les faire rejeter, aussi ne les emploie-t-on presque plus.

Fig. 243.



On remédie à cet inconvenient en employant des verticales entre les montants principaux; souvent on a cherché à améliorer ce système de lattices en construisant les barres diagonales comprimées en fers en T. On arrive ainsi à introduire dans le

lattice un élément rigide et de plus à décharger fortement la barre diagonale tirée, comme le montrent plus en détail les équations 300) et 301).

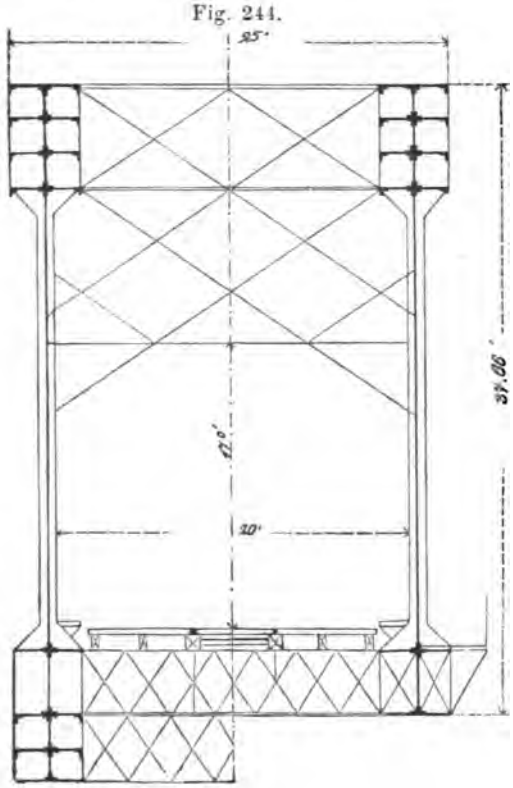
La construction de pareils systèmes peut être avantageuse, mais le calcul se complique puisqu'il faut écrire l'équation 301) pour chaque paire de barres séparément et qu'il faut déterminer une valeur moyenne $\mathfrak{B} : \mathfrak{B}_m$ pour l'introduire dans l'équation 302).

198. Le *pont sur la Vistule à Dirschau* est de tous les ponts à poutres lattices celui qui a la plus grande portée; il se compose de:

6 ouvertures	à 121,1^m	=	726,60^m
5 piles intermédiaires	à 9,73^m	=	48,65^m
2 culées extrêmes	à 31,0^m	=	62,00^m
			837,25^m

Les poutres étant continues sur deux travées, on a pour ainsi dire 3 ponts séparés successifs.

Fig. 244.



Les barres sont formées de fers plats de même section tant pour la traction que pour la pression; des montants verticaux se trouvent de 6 en 6 pieds, soit 1,88^m; on peut donc employer les règles indiquées au N°. **195**. — Le pont est construit pour une seule voie, mais il sert en même temps comme pont de route (voir la fig. 244); la distance des deux parois du lattice a été choisie de manière que deux chariots puissent se croiser lorsque la voie est libre; la portée dans-œuvre en coupe transversale du pont, est de 20 pieds soit 6,27^m.

D'après les données énoncées plus haut, la surcharge est celle d'un

pont à une voie de chemin de fer, de 2128 livres anciennes par pied courant, soit de 3170 kilogr. par mètre; l'effort maximum ne doit pas dépasser 10,000 livres par pouce carré, soit 684 kilogr. par centimètre carré.

Le poids propre de la construction est, selon les indications, de 6160 livres par pied courant, soit de 9180 kilogr. par mètre (donc $p : q = 3 : 4$); ce poids est notablement plus fort que celui fourni par l'équation 103) pour 121^{m} d'ouverture, bien que des ponts à poutres continues puissent toujours être un peu plus légers. Ce surcroît de poids résulte en partie du système de la construction, mais il provient surtout d'autres circonstances.

D'un côté la largeur du pont et par cela même le poids du tablier sont plus grands qu'il ne le faut pour *une* voie, à cause du passage des chariots; (cette largeur était en partie indispensable vu la longueur du pont;) aussi le poids du contreventement a-t-il été relativement lourd.

Une seconde particularité est fournie par la correction que doit subir l'équation 103) pour de grandes ouvertures. Cette formule est fondée sur la supposition que le poids total $(p + k)$ soit à-peu-près constant par unité de longueur, comme cela a lieu d'après les tables XVII et XVII^{a} pour des ponts compris entre 10 et 60 mètres d'ouverture; pour des portées plus grandes, la surcharge reste à-peu-près la même (ou ne diminue que peu) tandis que le poids propre de la construction, calculé d'après l'équation 103), augmente rapidement; pour des ouvertures aussi considérables, il faut augmenter le coefficient C de l'équation 103) et cela d'autant plus que, par une augmentation de ce coefficient, le poids propre p, donc aussi la valeur $q = p + k$ augmentent. Cette dernière remarque est valable pour tous les ponts, tandis que l'augmentation du poids, par suite d'une plus grande largeur réclamée pour de grands ponts, disparaît pour des ponts à double voie, puisque ce poids, réparti sur deux voies, ne dépasse par les conditions normales; lorsque ces ponts pour deux voies ne sont formés que de deux fermes, il en résulte encore l'avantage toujours procuré par la construction de deux poutres au lieu de trois ou de quatre qui auraient à supporter la même charge; cette épargne en matière est notablement plus grande que l'augmentation du poids des pièces de pont et du contreventement supérieur, nécessité par la grande distance des deux fermes qui supportent deux voies.

199. La *section des nervures* du pont de Dirschau est en forme de cellules, elle résiste bien à la pression et permet l'emploi facile de couvre-joints; mais d'un autre côté, l'arrangement des cellules et la grande hauteur des poutres nécessitent un assez grand surcroît de matière.

La tension maximum dans les nervures devait rester constante sur toute la longueur du pont; à cet effet, la section des nervures varie avec les moments de flexion, la largeur des feuilles des tables varie entre 0,39 et 1,41 mètre, leur épaisseur entre 20 et 16^{mm}. Les nervures sont renforcées sur les piles, car nous voyons à l'aide de la planche IV, que le moment de flexion $\mathfrak{M}$ y augmente rapidement; à ces endroits, il a été ajouté d'autres cellules et en même temps la hauteur du lattice a été augmentée de 4 pieds soit de 1,26^{m}; par suite de cette augmentation de hauteur, la distance des centres de gravité des nervures sur les piles est de 10,90^{m}, tandis qu'elle n'est que de 10,28^{m} sur les autres parties du pont.

Les *montants verticaux* représentés par la fig. 241 sont distants entre eux de 6 pieds soit de 1,88 mètre, ensorte qu'il faut introduire comme longueur l des tiges, d : cos 45^{0} = 2,67^{m}. — La section des tiges varie avec l'effort tranchant, de 131^{mm} et 26^{mm} jusqu'à 80^{mm} et 13^{mm}; la distance en diagonale des mailles est de 2 pieds = 0,628^{m}; chaque coupe verticale est rencontrée par 32 barres; sur les piles, où, d'après la table XX:

$\mathfrak{B}$ = 0,625 q b = 0,625 (3170 + 9180) 121,1 = 934,75 tonnes,

donc $\mathfrak{B}'$ = 467,37 tonnes, nous trouvons par l'emploi de l'équation 300):

$$N_x \sin\varphi = \frac{2}{32} \cdot 467370 \; \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_m} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

d'après l'équation 286), on a:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + 0{,}00008 \; \frac{\omega l^2}{8\,\Theta}\right) \quad \ldots \quad \text{II.}$$

où il faut placer:

$$\omega = 13{,}1 + 2{,}6 = 34 \text{ cent. carrés},$$
$$l = d : \cos\varphi = 267 \text{ cent.},$$
$$\Theta = {}^{1}/_{12}\, b\, h^3 = 19{,}187\, c^4,$$

et l'on obtient:

$$\mathfrak{B} = 2{,}264\, \mathfrak{B}_m \quad \ldots \quad \text{III.}$$

Il résulte des équations I. et III.:

$$N_x = 30045 \text{ kilogr.} \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

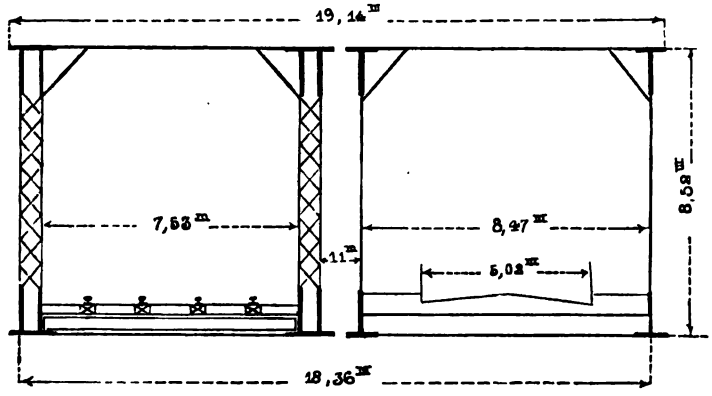
et:

$$\mathfrak{A} = \frac{N_x}{\omega} = \frac{30045}{34} = 884 \text{ kilogr.} \quad \ldots \quad \text{V.}$$

Cette tension est encore augmentée si l'on tient compte de la déduction pour les rivets. D'après les considérations de la fin du N^{o}. **189**, on peut regarder la pression $\mathfrak{B}$ maximum comme étant d'égale valeur.

200. La construction du pont sur la Vistule à Dirschau fut suivie de celle du *pont sur le Rhin à Cologne*, livré à la circulation en 1860. Ce pont a 4 ouvertures, chacune de 98,22^{m} de portée et les poutres sont continues sur deux travées; à côté du pont de chemin de fer à deux voies, il se trouve un pont de route de 8,47^{m} de largeur dans-œuvre, comme le montre plus en détail la fig. 245.

Fig. 245.



Ce pont a été décrit dans la „Zeitschrift für Bauwesen“ de Berlin, année 1863. Le poids propre de la construction métallique y est indiqué comme suit:

Table LVII.

N°.	Objets	Pont de chemin de fer.		Pont de route.	
		Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.
1.	Pièces de ponts	344257		174493	
2.	Contreventement supérieur .	86238		86460	
3.	Tiges horizontales du lattice	41516		44852	
4.	Nervures	1269744		719027	
5.	Tiges des fermes principales	684784		383989	
6.	Montants verticaux des fermes principales , ...	342246		307212	
			2768787		1715983

La longueur totale de la constrution métallique est de 415^{m}, et nous obtenons comme poids pour une portée de 98,12^{m},

pour le pont de chemin de fer, *par voie*:

$$p' = 27{,}91 + 420 = 3336^{k},$$

pour le pont de route de 8,4^{m} de largeur:

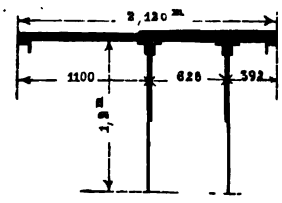
$$p' = 37{,}81 + 422 = 4135^{k}.$$

201. Le poids ci-dessus indiqué pour le pont sur le Rhin à Cologne est notablement plus faible que celui du pont sur la Vistule à Dirschau; bien que la portée ne dût fournir qu'une différence de 1000—1200 kilogr. par mètre et par voie, cette différence est en réalité d'environ 5800 kilogr., ensorte que le poids du pont sur le Rhin, réduit à la plus grande portée du pont à Dirschau est en poids, par mètre courant, toujours de moitié plus léger que ce dernier. — La raison doit en être cherchée en ce qu'un pont pour double voie peut être construit plus avantageusement et encore en ce que quelques particularités désavantageuses pour le pont à Dirschau ne se sont pas reproduites pour le pont sur le Rhin.

La largeur en diagonale des mailles a été choisie plus grande (0,785^{m}); dans le même panneau, les barres comprimées ont été construites plus fortes et surtout plus épaisses que les barres tirées. La distance des verticales, de 1,88^{m} dans le pont de Dirschau, n'est ici que de 1,57^{m} et a été réduite à 0,785^{m} près des appuis; les barres du pont sur le Rhin se trouvent donc dans des conditions beaucoup plus avantageuses que celles du pont sur la Vistule, qui ont servi au calcul dans le N°. **199**.

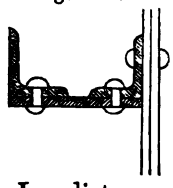
Une nouvelle disposition dans le pont sur le Rhin est celle d'un *double lattice*, qui permet l'emploi de montants verticaux rigides sans une augmentation bien grande de matière; ces montants consistent eux-mêmes en un lattice renfermé entre les deux parois du lattice double; on a fait le reproche à ce double lattice, que la première paroi devait supporter une trop grande partie de l'effort tranchant $\mathfrak{V}$; mais comme la force dans les barres dépend de la différence des forces dans les nervures (voir l'équation 173), il faudrait pouvoir démontrer que les nervures sont soumises à des tensions différentes; pour le pont de Cologne, le lattice intérieur sur les piles sera plus fatigué par la raison qu'en ces points les nervures ne sont pas symétriques (fig. 246) et que par suite les nervures intérieures ont à supporter une plus grande partie de la différence des forces dans les nervures. Dans le poids du tablier, de 420 kilogr. par voie, il faut remarquer que celui des longrines-sous-rails n'y est pas compris parce qu'elles sont en bois.

Fig. 246.



202. Le pont de route est construit plus légèrement que le pont de chemin de fer, le poids, pour 8,47^{m} de largeur, étant assez faible. — Les entretoises sont surtout fort légères et d'après les données de la „Zeitschrift für Bauwesen“ de Berlin leur ploiement sous les charges est de 2 1/2 à 4^{mm}; ce ploiement des entretoises est transmis nécessairement sur la paroi du latice et produit ainsi des oscillations, qu'on peut très-bien observer lors du passage de chariots; la même publication dit à cette occasion: „Ces mouvements ont pu être observés et mesurés très-exactement à l'aide du pont de chemin de fer et l'on a pu découvrir que ce mouvement, pour la forte armature rivée directement aux entretoises (voir fig. 247), est toujours de grandeur à-peu-près égale au ploiement des entretoises, tandis que les cornières simples, placées entre deux entretoises subissent une flexion à-peu-près double; cette dernière a été mesurée jusqu'à 4 1/2 lignes (10^{mm}).“

Fig. 247.



La distance des entretoises est de 10 pieds soit de 3,138^{m}; c'est seulement en ces points que viennent s'attacher les verticales indiquées par la fig. 245; entre ces deux verticales sont assemblées des cornières simples, qui n'augmentent guère la rigidité de la paroi du lattice de 8,52 mètres de hauteur.

Le tablier, dans le pont de route, est aussi construit en bois, à l'exception des entretoises (d'où provient le poids faible du tablier); sur les poutres de pin, de 182^{mm} de hauteur, repose une couche inférieure de madriers de pin imprégnés de créosote et vient ensuite une couche supérieure de madriers de 65^{mm} d'épaisseur, qui ne dura au commencement que 1 1/2 à 2 ans; il faut remarquer que plus tard, en 1862, des madriers de hêtre étaient encore intacts après avoir avoir servi 1 1/2 an.

§ 22.

Poutres lattices, à barres rigides et à tiges en fers méplats.

203. Une grande partie des barres d'un lattice n'étant soumise qu'à la traction, surtout pourdes poutres reposant librement sur deux appuis, on peut faire usage, pour ces barres, de fers plats, peu coûteux et commodes; pour les barres qui doivent subir un effort de compression, il faut employer des constructions de rigidité spéciales qui les protégent contre le voilement. Ces ponts se rapprochent du système de treillis symétriques, multiples, et peuvent être calculés d'après les mêmes formules que ces derniers, dès qu'on connaît la longueur libre L à introduire dans la formule 169) pour déterminer la résistance à la flexion de cette pièce.

Si l'on considère ces ponts comme ponts à poutres lattices — ce qui est plus simple pour le calcul et suffisamment exact quant aux sections obtenues — au lieu de l'équation 168), on peut employer l'équation plus précise 285); du reste, les règles du N°. **188** et en particulier les équations 287)—290) peuvent être appliquées; comme ces ponts sont généralement à nervures rectilignes, les équations 289), 290), 166) à 168) et 285) suffiront en général pour trouver les dimensions des sections.

En employant les notations indiquées au N°. **188**, nous avons *pour des fermes lattices, à nervures rectilignes horizontales, à barres rigides et à tiges en fers plats:*

Effort de tension dans une section quelconque de nervure soumise à la traction:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{1}{\Omega_x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 305)$$

Effort de compression dans une section quelconque de nervure soumise à la pression:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{1}{\Omega_x} \quad \ldots \ldots \quad 306)$$

En prenant $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m$, nous supposons que la distance des articulations du système ne soit pas d'une grandeur telle que la nervure doive résister à la flexion, car, dans ce dernier cas, il serait préférable de calculer le pont comme un treillis.

Effort de tension dans une barre quelconque N_x (ou T_x) *soumise à la traction,* dont le milieu est indiqué par l'abscisse x:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{B}'_x \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{\omega} \quad \ldots \quad 307)$$

Effort de compression maximum dans une barre quelconque T_x (ou N_x) *soumise à la pression,* dont le milieu est indiqué par l'abscisse x:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{B}'_x \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \left(1 + K \frac{\omega l^2}{4\,\Theta}\right) \quad . \quad 308)$$

dans cette équation, l indique la longueur totale de la tige comprise entre le milieu des lignes des nervures.

Pour les tiges soumises alternativement à la tension et à la pression, il faut employer en général l'équation 308); en tout cas il faut que ces barres soient *rigides,* lors même qu'elles réclament une section plus grande pour résister à la traction que pour supporter la pression. — Pour des poutres continues de faible ou de moyenne portée, où la plus grande partie des barres sont soumises alternativement à la traction et à la pression, il est souvent avantageux de munir la poutre en entier de barres rigides

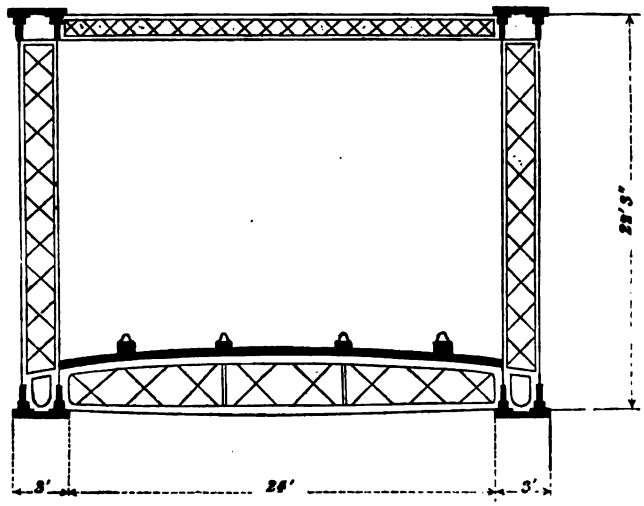
qu'on calculera d'après le § 20; ces dernières ont encore l'avantage que la rigidité des barres tirées vient renforcer la résistance à la flexion des barres comprimées. —

D'un autre côté, des poutres construites avec des tiges comprimées de forme différente ont l'avantage que, lorsque ces tiges réclament une section un peu grande, elles peuvent être construites de plusieurs pièces et qu'elles sont peu coûteuses, vu la simplicité des fers employés.

204. Le pont de *Drogheda* sur le *Boyne* (côte orientale de l'Irlande) est un excellent spécimen de cette classe de ponts à poutres lattices; ce pont a été livré à la circulation en 1855; il se distingue par un emploi rationnel de la matière, par une grande légèreté, et par un mode singulier de rendre rigides les barres comprimées. Les notices suivantes sont tirées d'une publication de Mr. Lohse dans la „Zeitschrift für Bauwesen" de Berlin, 1855; cette publication indique comme constructeurs du pont Sir John Macneill et Mr. James Barton.

Le pont, pour double voie, se compose de deux fermes représentées dans la fig. 248; chacune d'elles est formée d'une

Fig. 248.



double paroi lattice, et la rigidité des barres comprimées est obtenue par l'attache de deux tiges placées l'une vis-à-vis de l'autre, qui, à l'aide de cornières et d'un léger treillis, forment une seule barre rigide; on n'a pas employé de montants verticaux (hormis les armatures verticales sur les culées), ensorte que la

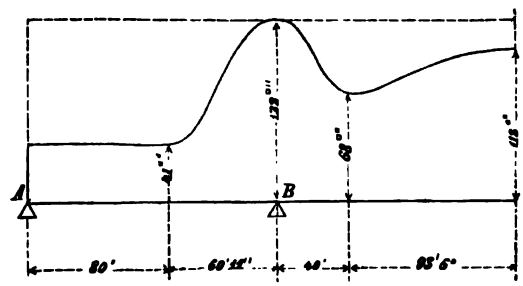
tension des barres tirées peut être calculée exactement d'après l'équation 307.

Ce pont a 3 ouvertures franchies au moyen de poutres continues; les portées sont:

Ouverture centrale, entre les milieux des piles:
267′ anglais = 81,38m
2 ouvertures extérieures, chacune de 140′ 11″ = 85,90m
Total 167,28m

Au-dessus des appuis, les barres reposent sur une seule armature verticale de 0,915m de largeur et de longueur égale, — aussi dans l'emploi de la théorie de la ligne élastique ne pouvait-il exister aucun doute sur la portée à introduire dans le calcul, et les sections des nervures ont été choisies conformes aux moments de flexion que la fig. 249 indique plus en détail. — La variation

Fig. 249.



des coupes a pu avoir lieu d'une manière assez régulière, parce que les tables horizontales ont été choisies de faible épaisseur, descendant même jusqu'à 6 et 5mm. — On calcule les moments de flexion d'après l'équation 109), après avoir obtenu d'après l'équation 124) les pressions sur les appuis pour la surcharge adoptée. Quelques-unes de ces valeurs de $\mathfrak{M}$ sont contenues d'une manière approximative dans la table XXIV pour le rapport $a : b = \frac{1}{2}$.

Les constructeurs ont adopté le mode de charge représenté graphiquement dans la planche V et indiqué dans le N°. **78**; il a été constaté par l'enlèvement de rivets et par l'observation de joints correspondants que les points d'inflexion de la ligne élastique (pour lesquels $\mathfrak{M} = o$) se trouvaient bien exactement dans ces points calculés; il est permis de croire que, dans le calcul de l'élastique, il a été employé un moment d'inertie constant sur toute la longueur d'une travée; d'après les recherches faites sur ce pont, cette supposition n'a pas fourni un grand changement

dans la position des points d'inflexion, bien qu'en réalité les sections des nervures soient variables.

Le *poids propre* de la travée du milieu indiqué dans le rapport de Mr. Lohse est de 1,446 tonne par pied courant, soit de 4820 kilogr. par mètre, donc de 2410 kilogr. par mètre et par voie; ce poids est formé: de celui

des nervures	1340 kilogr.	
des verticales et des barres du lattice	517 „	
des armatures sur les appuis . .	155 „	
du contreventement supérieur . .	42 „	
du contreventement inférieur . .	68 „	
		2122
		288
	Total	2410 kilogr.

Le *poids propre de la construction métallique*, par mètre courant de voie est donné pour la travée du milieu de 81,4^{m} de portée par la formule:

$$p' = 26\,l + 290 = 2406 \quad . \; . \; . \; . \quad I.$$

Il faut remarquer que le faible poids du tablier provient de ce que les longrines qui supportent les rails sont en bois, ensorte que leur poids n'entre pas dans celui indiqué ci-dessus. Ces longrines, ainsi que des madriers en chêne, peuvent représenter un poids de 400 kilogr. par mètre, celui des rails et accessoires de 80 kilogr. par mètre de voie, ensorte que comme poids total on obtient:

$$p = 26\,l + 770 = 2886 \text{ kilogr.} \; . \; . \; . \quad II.$$

Comme surcharge k, il a été pris 1 tonne par pied courant de voie, soit 3334 kilogr. par mètre; d'où résulte comme *charge totale* $q = p + k = 6220$ kilogr.

205. L'équation 308) admet que les barres sont suffisamment reliées entre elles et rigides dans le sens longitudinal de la paroi du lattice parce que la largeur des barres est le plus souvent dans une proportion favorable avec la distance des mailles (voir la remarque sur l'équation 285); l'équation 308) suppose donc que le moment d'inertie soit calculé perpendiculairement à la paroi verticale du lattice; les barres comprimées du pont Drogheda-Boyne, formant elles-mêmes un lattice, sont, dans cette direction, d'une résistance suffisante, car leur hauteur, perpendiculaire à la paroi, est à-peu-près le $^{1}/_{12}$ de la longueur totale de la barre.

D'un autre côté, vu *la grande distance des panneaux de* 2,25^{m}, il faut considérer *le ploiement des barres du latice dans le plan de la paroi verticale;* c'est pourquoi on a fait plusieurs recherches

spéciales en chargeant directement une poutre lattice de même longueur et de même hauteur que les barres comprimées employées; à des distances qui correspondaient aux points de croisement des barres, cette pièce était retenue par des attaches transversales qui pouvaient se mouvoir librement dans le sens longitudinal, mais qui ne permettaient pas de mouvement transversal; cette poutre lattice se trouvait donc dans une position analogue à celle des barres comprimées de la poutre principale; comme la résistance au ploiement dépendait principalement de la largeur des tiges du lattice, il n'a été employé, dans ces recherches que des tiges plus faibles n'ayant que 4 pouces (102^{mm}) de largeur; on obtint une résistance à la rupture de 11 tonnes par pouce carré anglais; toutefois Mr. Barton crut pouvoir compter sur 14 tonnes par pouce carré, soit sur 2200 kilogr. par centimètre carré, vu que la rupture eut lieu en un point faible de la poutre; cette résistance est à-peu-près les $^2/_3$ de celle à la compression, ensorte qu'on peut admettre que pour les fortes tiges d'une largeur de 266^{mm}, le rapport $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ est très-favorable; les barres plus faibles, qui ne sont que peu chargées par unité carrée (surtout parce que le tablier est situé à la partie inférieure des poutres), donnent sensiblement la limite du rapport qui doit être employé entre la distance des mailles et la largeur des tiges; il résulte donc que la distance entre les croisements des barres mesurée le long de ces dernières, doit être au plus de 18 fois la largeur des barres, et, en règle générale, seulement de 10 à 12 fois cette largeur. Cette règle peut aussi être admise pour des barres rigides (fig. 237 et 238) et nous voyons en effet que, dans l'exécution, la largeur des fers en T et des fers en Ω est dans une proportion analogue avec la distance des mailles. Les tiges en fers plats permettraient un rapport un peu différent, en ce qu'elles produiraient une rigidité relativement plus grande dans le plan de la paroi du treillis; toutefois des circonstances désavantageuses pouvant se présenter, on ne choisit guère la largeur des tiges en-dessous du $^1/_{12}$ de la distance des points de croisement.

206. Le *viaduc sur la Sarine à Fribourg* fournit un autre exemple d'un pont à barres comprimées rigides; ces dernières ont reçu la forme de ⊔, tandis que les barres tirées consistent en fers méplats; les deux ailes des fers en ⊔ n'ont chacune que 70^{mm} de hauteur, ensorte qu'on n'a pas obtenu la rigidité des fers en T ordinaires; à tous les 5,58^m, ou à tous les 4,18^m vers les culées, il a été ajouté des armatures verticales. — Ce pont, décrit dans la „Zeitschrift für Bauwesen“ de Berlin, 1863, présente encore la particularité que ses poutres principales continues franchissent *sept* ouvertures; les 5 ouvertures du milieu

ont chacune 48,8^{m}, et les deux extrêmes chacune 44,92^{m} de longueur, ensorte qu'on a un treillis continu de 333,83^{m} de longueur; non seulement cette continuité a facilité le montage du pont par glissement, mais elle a été avantageuse au montage des piles métalliques intermédiaires; le treillis était à cet effet armé de câbles particuliers. La construction et le montage de la partie métallique du pont ont été faits par MM. Schneider et Cie., du Creusot.

CHAPITRE SEPTIEME.

Supplément et considérations rétrospectives.

§ 23.

Ponts-tubes.

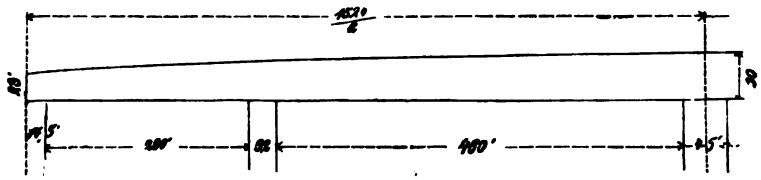
207. Les parois verticales des *ponts-tubes* agissent d'une manière analogue à celles des autres ponts-poutres, elles peuvent consister en un treillis, un lattice ou être pleines. Ce qui distingue les ponts-tubes des autres ponts, c'est que les *nervures* des deux parois verticales (servant ordinairement pour une seule voie) sont reliées de façon à former une seule bande sur la largeur entière du pont. Les nervures inférieures forment le fond, et les nervures supérieures, la couverture du tube.

Les formules que nous avons développées dans les chapitres précédents pour le calcul des forces dans les nervures et dans les barres, s'appliqueraient directement aussi aux ponts-tubes, lorsqu'on pourrait prouver que les forces dans les nervures se répartissent uniformément sur la section entière, condition sur laquelle sont fondées les équations 166) et 167). Cette condition ne peut pas être complétement remplie dans les ponts-tubes, parce que la différence des forces dans les nervures doit être supportée par les forces dans les barres (ce qui résulte des équations 18) et 173), tandis que les forces dans les barres n'agissent qu'à l'extérieur, c'est-à-dire que des deux côtés des larges bandes des nervures; ces dernières doivent supporter outre leurs tensions longitudinales des efforts rasants qui résultent de ce que les différences des forces dans les nervures sont produites dans le voisinage des parois verticales et reportées vers le milieu par la résistance au cisaillement des feuilles des nervures; ces parties du milieu des nervures auront donc toujours à supporter un effort moindre que les parties voisines des parois; il faut encore remarquer que les

nervures des ponts-tubes, par suite de leurs grandes largeurs, consistent toujours en une série de feuilles de tôles. Afin de réduire à un minimum l'inégalité des tensions dans les nervures, on renforce la liaison des feuilles des nervures par des constructions spéciales, *les armatures transversales*, aussi nommées *carlingues*, qui, par leur résistance à la flexion dans le sens horizontal, s'opposent au glissement des feuilles des nervures. — A la partie inférieure, ces carlingues servent d'entretoises pour le tablier, et à la partie supérieure aussi bien qu'à la partie inférieure, elles renforcent le contreventement, formé lui-même par les nervures. — Les carlingues étant destinées à répartir uniformément les forces dans les barres sur la largeur totale des nervures, celles voisines des culées sont soumises à des efforts notablement plus grands que ceux qui agissent dans les carlingues situées vers le milieu du pont, elles doivent en conséquence être construites plus fortes, ou être en plus grand nombre.

208. Le premier *pont-tube* qui ait été construit est celui nommé *Britannia*, qui raccourcit la distance entre l'Angleterre et l'Irlande en franchissant le détroit de Menai; sous plusieurs rapports, c'est un des ponts-tubes les plus considérables; jusqu'à ces derniers temps, aucun pont-poutre existant n'avait une portée aussi grande et celle-ci n'a été jusqu'ici surpassée que par celle du pont sur le Leck, représenté par la fig. 228. — Le pont de Britannia, construit sous la direction de Mr. Robert Stephenson, a 4 ouvertures, les deux plus grandes chacune de 460 pieds anglais (140 mètres), les deux autres plus faibles, de 230 pieds anglais (70 mètres) chacune, comme le représente la fig. 249.

Fig. 249.

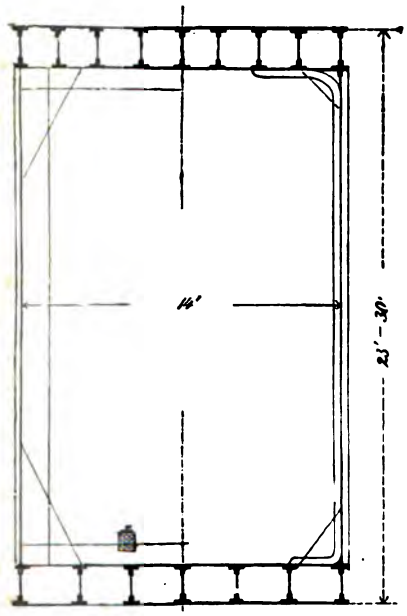


La construction du pont de Britannia a donné lieu à un progrès général, celui de l'emploi du *fer forgé* sur une grande échelle, aussi pour les pièces soumises à la compression; la grande portée a nécessité la recherche du rapport qui devait exister entre le poids à soutenir et le poids propre du pont; à cet effet, MM. W. Fairbairn et E. Hodgkinson ont fait des expériences importantes, surtout sur la résistance des matériaux (fer forgé et fonte). Mr. E. Clark, chargé de la construction du pont, en a donné une description détaillée ainsi que les notices historiques, dans l'ouvrage intitulé:

„*The Britannia and Conway tubular bridges by Edvin Clark published under the supervision of Robert Stephenson.*“

L'emplacement du pont était donné par le rocher de Britannia, suffisamment large pour permettre la construction d'une forte pile intermédiaire. Le premier projet de Mr. Stephenson présente deux arcs de 350 pieds de portée; l'amirauté réclama un rectangle de 460 pieds d'ouverture et de 105 pieds de hauteur, ce qui rendit l'arc impossible. On pensait devoir recourir à un pont en chaînes et le tube n'aurait servi qu'à rendre le tablier rigide, mais le mode de suspension aurait été différent de celui des ponts ordinaires en chaînes. — Ce projet préalable était considéré par Mr. Stephenson comme étant le seul rationnel si l'ouverture devait être notablement plus grande; les recherches faites montrèrent toutefois qu'une ouverture de 460 pieds anglais pouvait être franchie à l'aide d'un tube en fer forgé, c'est-à-dire à l'aide d'une poutre droite, sans qu'on eût recours à une chaîne, et l'on fixa les dimensions principales telles qu'elles sont indiquées dans la fig. 249; le tube est continu sur toutes les ouvertures, seulement la continuité n'est pas parfaite sur la pile du milieu; la ligne élastique y est brisée, et l'angle sous lequel les deux portions de courbes viennent se relier a été choisi de manière que les valeurs des moments de flexion maxima sur la pile et dans la grande ouverture ne différassent pas trop l'une de l'autre. Avant de faire cette importante application de la théorie de l'élastique, on fit des recherches directes sur une tige en bois de 36 pieds de longueur et de 1 pouce de côté en section transversale; ces recherches furent confirmées par celles qu'on pu faire sur le tube achevé. (Voir le N°. **203**, où sont mentionnées des recherches analogues faites pour le pont Drogheda-Boyne.

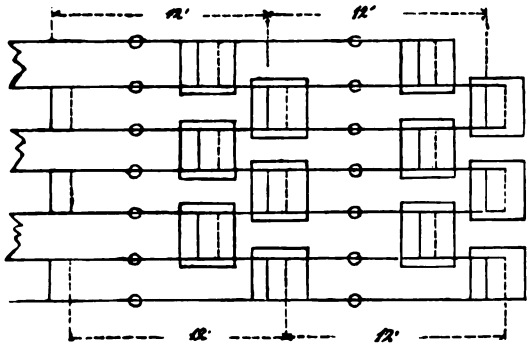
Fig. 250.



Des recherches subséquentes montrèrent que le tube agit en effet comme une poutre homogène. — On détermina ensuite par des expériences faites sur un tube métallique le nombre des armatures de la paroi du tube et les dimensions qu'on devait leur donner. Après plusieurs recherches sur des tubes en cercle et sur des tubes elliptiques, on s'arrêta à la forme représentée dans la fig. 250. La

partie supérieure (couverture) soumise principalement à la pression obtint un plus grand nombre de compartiments que la partie inférieure (le fond); dans cette dernière, on employa avec soin les couvre-joints nécessaires; la disposition particulière des joints de la double couche de tôle du fond du tube a déjà été représentée en coupe longitudinale par la fig. 51, et est donnée en plan, par la fig. 251; les petits disques de cette figure indiquent les joints des parois

Fig. 251.



verticales qui se trouvent entre les joints des couches horizontales; les couvre-joints indiqués dans la fig. 251 ont 3 pieds (0,915 mètre) de longueur et les feuilles de tôle se recouvrent de 1 pied (0,305 mètre).

Les *parois verticales* du tube consistent en tôles de 2 pieds (0,61 mètre) de largeur et de $^{8}/_{16}$ à $^{10}/_{16}$ de pouce (13 mm à 16 mm) d'épaisseur. Les couvre-joints sont formés de fers en ⊤, analogues à ceux indiqués dans la planche VII pour le pont de Langon.

209. Le propre poids du pont de Brittania est considérable; il est, pour les grands tubes, de 3,30 tonnes par pied courant soit de 11270 kilogr. par mètre, celui des petites ouvertures est de 8670 kilogr. par mètre.

Le montage du tube eut lieu séparément pour chaquet ravée; pour les petites ouvertures, au moyen d'un échafaudage élevé sur le chantier même, pour les grandes, sur des chantiers spéciaux; les grands tubes, une fois terminés, furent amenés sur des radeaux entre les piliers, et élevés au moyen de presses hydrauliques; on fit la liaison des tubes entre eux en tenant un compte exact de l'angle de l'élastique; comme nous l'avons déjà indiqué, la continuité est imparfaite sur la pile du milieu. On évita ainsi un moment de flexion maximum démesuré sur cette pile du milieu et les grands tubes eurent à supporter, au montage leur plus grand effort; vu le poids considérable de la construction elle-

même, le moment de flexion au milieu des tubes reposant librement sur deux appuis et non-chargés est notablement plus grand que le moment de flexion maximum du pont chargé lorsque la liaison des 4 tubes est opérée.

210. En même temps que le pont de Britannia, on construisait aussi le *pont-tube de Conway* (1844—1848) d'une seule ouverture de 125 mètres de portée; la disposition est sensiblement analogue à celle que montre la fig. 250 pour le pont de Britannia. — Le poids métallique est de 9270 kilogr. par mètre et se répartit en 58% de tôles, 27% de cornières et de fers en ⊤; 10% de couvre-joints et 5% de têtes de rivets.

Le pont de *Victoria, à Montréal*, projeté par Mr. Robert Stephenson, est d'une longueur exceptionnelle; c'est un pont-tube formé de 34 ouvertures, chacune de 73,8 mètres, et d'une ouverture au milieu, de 100,6 mètres de portée; pour cette dernière ouverture, le poids du tube est, à ce que nous avons lu de 6000 kilogr. par mètre courant. — Les tubes ne sont pas continus; aussi le fond, n'étant soumis qu'à la tension, est-il composé de tôles sans carlingues longitudinales; la couverture est formée de compartiments pour la grande ouverture, mais, pour les petites, les compartiments sont remplacés par des carlingues longitudinales en fers en T.

Le *pont sur la Nogat, à Marienbourg*, est un pont-tube à parois en lattices, il a été construit en même temps que le pont sur la Vistule à Dirschau (voir N°. **198**), mais pour des considérations militaires (de fortification), sa hauteur devait être réduite à un maximum. — Le fond et la couverture de ce pont consistent en une seule couche de tôles, renforcées et armées de carlingues longitudinales en forme de ⌊⌐.

§ 24.

Poutres composées ou armées.

211. Les *poutres armées*, aussi nommées *poutres composées*, peuvent se calculer d'après les règles des ponts en treillis; toute-

Fig. 252.

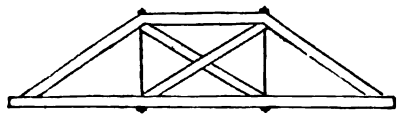
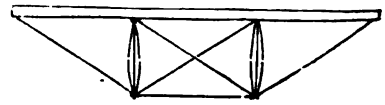


Fig. 253.

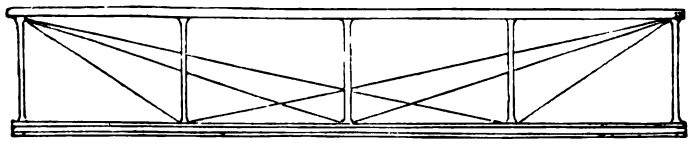


fois le petit nombre et la grandeur relativement considérable des panneaux nécessitent pour le calcul des $\mathfrak{M}$ et des $\mathfrak{B}$, l'emploi

des règles indiquées pour le cas de charges concentrées, dans le N°. **24** et spécialement par les équations 170)—173). Les barres diagonales indiquées dans les fig. 252 et 253 ne sont soumises à aucun effort pour une charge uniformément répartie, mais elles sont indispensables pour les charges partielles. — Les poutres armées, dont la forme la plus simple est représentée dans les figures ci-dessus, appartiennent à la classe des treillis simples non-symétriques; les forces dans les nervures et dans les barres se calculent à l'aide des équations 186)—191), dès que les $\mathfrak{M}$ et les $\mathfrak{V}$ auront été trouvés d'après les équations 170)—173).

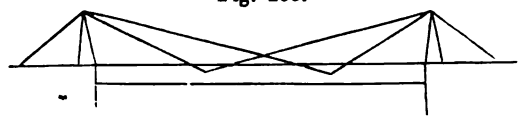
212. Les poutres armées peuvent être construites sans barres diagonales si l'on emploie une tige spéciale pour chaque barre verticale, comme le représente la fig. 254; le caractère distinctif

Fig. 254.



des ponts-poutres disparaît alors et nous avons un pont en chaînes ou pont suspendu; si, en effet, nous supposons la longrine supérieure remplacée par des chaînes *de retenue*, les barres verticales ne sont plus nécessaires et nous obtenons le type indiqué par la fig. 255, auquel les équations 185) à 191) ne sont plus applicables; on fait le calcul en considérant les points où le tablier est suspendu comme fixes, c'est-à-dire comme points d'appui, et en décomposant dans les directions données des chaînes, les pressions sur les appuis, déterminées d'après le § 8. Ce dernier

Fig. 255.

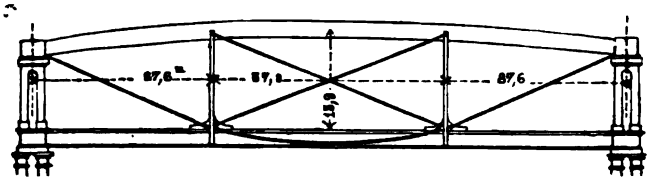


calcul se complique par l'abaissement des points d'appui dans le cas d'une surcharge, quand on emploie des poutres continues pour le tablier; les règles à appliquer sont aussi contenues dans le § 8.

213. Comme exemple d'une poutre armée de grande dimension, nous prendrons le *pont* bien connu *sur le Vye à Chepstow*,

dont l'ouverture principale est représentée dans la fig. 256. Ce pont a été construit par Mr. J. K. Brunel, immédiatement après celui de Brittania; il est aussi fait entièrement de fer forgé. De

Fig. 256.



même que dans le pont de Saltash construit quelques années plus tard aussi par Mr. Brunel, la longrine supérieure soumise à la pression se compose d'un tube en tôle de 15 mm d'épaisseur, comme le montre la fig. 257; les tubes ont 2,75 mètres de diamètre et sont renforcés tous les 8 mètres par des diaphragmes. — La tige inférieure et les diagonales sont faites de chaînes, le tablier est supporté par des poutres en tôle de 2,3 mètres de hauteur et de 6 mm d'épaisseur de paroi verticale. Mr. Brunel indique (voir Clark, page 103) comme

poids du pont pour *une voie:*

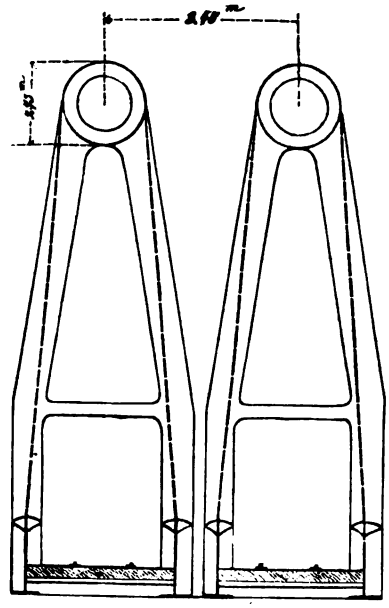
Tubes avec couvre-joints	127, 5	tonnes,
Supports du tube	7,75	„
Tôles latérales etc. pour assujettir les chaînes .	15,00	„
„ „ „ pour les chaînes diagonales .	2,25	„
Diaphragmes intérieurs, à 8 mètres d'intervalle .	4,25	„
Têtes de rivets	4,75	„
Chaînes principales et boulons	105,0	„
Chaînes diagonales	23,0	„
Chevalets	18,5	„
Glissières et rouleaux aux points de suspension .	22,0	„
Tablier, c'est-à-dire poutres et pièces de pont .	130,0	„
Total	460,0	tonnes.

Le poids métallique est donc par mètre courant de simple voie, pour 93,0 mètres de portée:

$$p' = 38\ l + 1400 = 4934 \text{ kilogr.}$$

Le poids considérable du tablier est nécessité par la grande longueur des panneaux; du reste le poids correspond à-peu-près à celui du pont de Saltash, indiqué dans le N°. **167.**

Fig. 257.



§ 25.

Poutres continues sur plusieurs ouvertures.

214. Les ponts à plusieurs ouvertures reçoivent souvent dans ces derniers temps des poutres reposant librement sur les appuis, comme le montrent nos exemples des ponts en treillis. — D'un autre côté, les ingénieurs français emploient encore de préférence les ponts à *poutres continues* et souvent sur un *grand nombre* d'ouvertures, comme le prouve le pont sur la Sarine à Fribourg (N°. **205**).

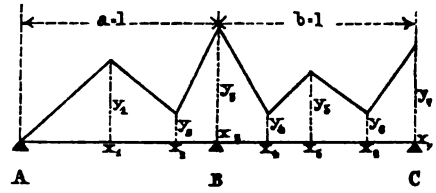
Dans les „Annales des Ponts et Chaussées, année 1866", Mr. Renaudot a publié, pour une série de cas, les valeurs principales des moments de flexion $\mathfrak{M}$ et des efforts tranchants $\mathfrak{V}$; nous reproduisons dans les tables LIX à LXI les résultats qui se rapportent à *quatre* et à *cinq ouvertures d'égale portée.*

Lorsque les tables LIX à LXI sont insuffisantes (surtout lorsque les ouvertures extérieures sont différentes), on pourra toujours employer la méthode de Mr. Clapeyron, indiquée dans les N^os^. **21** et **22**, qui est aussi applicable lorsque les points d'appui intermédiaires sont abaissés; voir les cas développés dans les N^os^. **74**, **81** et **82**.

Table

Poutres continues sur

Fig. 258.

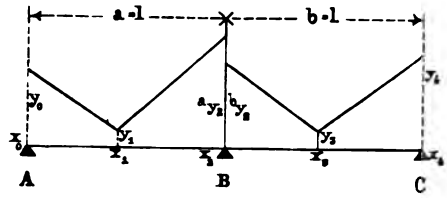


$\frac{k}{p}$	Moments de flexion maxima $\mathfrak{M}$.								
	$\frac{x_1}{l}$	$\frac{y_1}{p l^2}$	$x_2=0{,}7861$ $\frac{y_2}{p l^2}$	$x_3=1$ $\frac{y_3}{p l^2}$	$x_4=0{,}2681$ $\frac{y_4}{p l^2}$	$\frac{x_5}{l}$	$\frac{y_5}{p l^2}$	$x_6=0{,}8041$ $\frac{y_6}{p l^2}$	$x_7=1$ $\frac{y_7}{p l^2}$
0,00	0,393	0,0772	0,0000	0,1071	0,0000	0,563	0,0364	0,0000	0,0714
1,00	0,420	0,1761	0,0421	0,2277	0,0491	0,527	0,1168	0,0402	0,1786
1,25	0,423	0,2009	0,0526	0,2578	0,0614	0,526	0,1369	0,0502	0,2054
1,50	0,425	0,2258	0,0631	0,2879	0,0737	0,526	0,1570	0,0603	0,2321
1,75	0,427	0,2506	0,0737	0,3181	0,0859	0,524	0,1772	0,0703	0,2589
2,00	0,429	0,2755	0,0842	0,3482	0,0982	0,524	0,1973	0,0804	0,2875
2,50	0,431	0,3253	0,1052	0,4085	0,1228	0,523	0,2375	0,1004	0,3393
3,00	0,433	0,2750	0,1263	0,4688	0,1473	0,522	0,2778	0,1205	0,3929
4,00	0,436	0,4746	0,1684	0,5893	0,1964	0,521	0,3583	0,1607	0,5000
5,00	0,433	0,5722	0,2105	0,7098	0,2455	0,521	0,4388	0,2009	0,6071

LIX.

4 ouvertures égales.

Fig. 259.



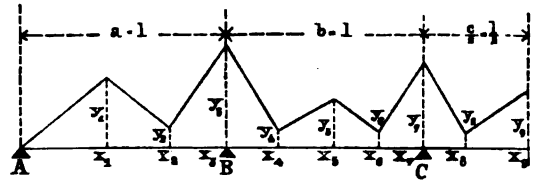
Efforts tranchants maxima $\mathfrak{V}$ et réactions sur les culées A, B, C.

$x_0 = 0{,}000$	$x_1 = 0{,}3931$	$x_2 = 1$	$x_3 = 0{,}000$	$x_4 = 0{,}5361$	$x_5 = 1$	$\frac{B}{pl}$	$\frac{C}{pl}$
$\frac{y_0}{pl} = \frac{A}{pl}$	$\frac{y_1}{pl}$	$\frac{{}^a y_2}{pl}$	$\frac{{}^b y_2}{pl}$	$\frac{y_3}{pl}$	$\frac{y_4}{pl}$		
0,3929	0,0000	0,6071	0,5357	0,0000	0,4643	1,1429	9,2086
0,8393	0,0536	1,2277	1,1384	0,0670	1,0357	2,3661	2,0741
0,9509	0,0670	1,3828	1,2891	0,0837	1,1786	2,6716	2,3571
1,0625	0,0804	1,5379	1,4397	0,1004	1,3214	2,9777	2,6429
1,1741	0,0937	1,6931	1,5904	0,1172	1,4643	3,2835	2,9286
1,2857	0,1071	1,8482	1,7411	0,1339	1,6071	3,5893	3,2143
1,5089	0,1339	2,1586	2,0424	0,1647	1,8929	4,2009	3,7857
1,7321	0,1607	2,4688	2,3438	0,2009	2,1786	4,8125	4,3571
2,1786	0,2143	3,0893	2,9464	0,2679	2,7500	6,0357	5,5000
2,6250	0,2679	3,7098	3,5491	0,3349	3,3214	7,2589	6,6429

Tables

Poutres continues sur

Fig. 260.



LX. Moments de flexion

$\frac{k}{p}$	$\frac{x_1}{l}$	$\frac{y_1}{p\,l^2}$	$x_2 = 0.789\,l$ $\frac{y_2}{p\,l^2}$	$x_3 = l$ $\frac{y_3}{p\,l^2}$	$x_4 = 0{,}268\,l$ $\frac{y_4}{p\,l^2}$
0,00	0,395	0,0779	0,0000	0,1053	0,0000
1,00	0,421	0,1778	0,0416	0,2249	0,0491
1,25	0,424	0,2022	0,0519	0,2548	0,0614
1,50	0,426	0,2272	0,0623	0,2847	0,0737
1,75	0,428	0,2522	0,0727	0,3146	0,0859
2,00	0,430	0,2771	0,0831	0,3445	0,0982
2,50	0,432	0,3271	0,1039	0,4043	0,1228
3,00	0,434	0,3771	0,1247	0,4641	0,1473
4,00	0,437	0,4771	0,1662	0,5837	0,1964
5,00	0,439	0,5771	0,2078	0,7033	0,2455

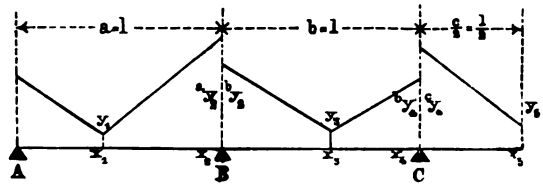
LXI. Efforts tranchants maxima S

$\frac{k}{p}$	$x_0 = 0{,}000$ $\frac{y_0}{pl} = \frac{A}{pl}$	$x_1 = 0{,}395\,l$ $\frac{y_1}{pl}$	$x_2 = l$ $\frac{{}^a y_2}{pl}$	$x_2 = 0{,}000$ $\frac{{}^b y_2}{pl}$	$x_3 = 0{,}526\,l$ $\frac{y_3}{pl}$
0,00	0,3947	0,0000	0,6053	0,5263	0,0000
1,00	0,8421	0,0526	1,2240	1,1244	0,0718
1,25	0,9539	0,0658	1,3798	1,2739	0,0897
1,50	1,0658	0,0789	1,5347	1,4234	0,1077
1,75	1,1776	0,0921	1,6896	1,5730	0,1256
2,00	1,2895	0,1053	1,8445	1,7225	0,1435
2,50	1,5132	0,1316	2,1548	2,0215	0,1794
3,00	1,7368	0,1579	2,4641	2,3206	0,2153
4,00	2,1842	0,2105	3,0837	2,9187	0,2871
5,00	2,6316	0,2632	3,7033	3,5167	0,3589

LX et LXI.

5 ouvertures égales.

Fig. 261.



maxima $\mathfrak{M}$. Fig. 260.

$\frac{x_5}{l}$	$\frac{y_5}{p\,l^2}$	$x_6 = 0{,}784\,l$ $\frac{y_6}{p\,l^2}$	$x_7 = l$ $\frac{y_7}{p\,l^2}$	$x_8 = 0{,}197\,l$ $\frac{y_8}{p\,l^2}$	$x_9 = \frac{1}{2}$ $\frac{y_9}{p\,l^2}$
0,526	0,0333	0,0000	0,0789	0,0000	0,0461
0,520	0,1122	0,0428	0,1902	0,0397	0,1316
0,519	0,1320	0,0529	0,2180	0,0496	0,1530
0,518	0,1517	0,0635	0,2458	0,0595	0,1743
0,518	0,1715	0,0740	0,2736	0,0694	0,1957
0,518	0,1913	0,0846	0,3014	0,0793	0,2171
0,517	0,2308	0,1058	0,3571	0,0992	0,2599
0,516	0,2703	0,1269	0,4127	0,1190	0,3026
0,516	0,3756	0,1698	0,5289	0,1587	0,3882
0,515	0,4810	0,2119	0,6253	0,1988	0,4737

et réactions sur les culées A, B, C. Fig. 261.

$x_4 = l$ $\frac{{}^b y_4}{p\,l}$	$x_4 = o$ $\frac{{}^c y_4}{p\,l}$	$x_5 = \frac{1}{2}$ $\frac{y_5}{p\,l}$	$\frac{B}{p\,l}$	$\frac{C}{p\,l}$
0,4737	0,5000	0,0000	0,1316	0,9737
1,0502	1,0909	0,0909	2,3493	2,1411
1,1944	1,2386	0,1136	2,6537	2,4330
1,3385	1,3864	0,1364	2,9581	2,7249
1,4827	1,5341	0,1591	3,2626	3,0167
1,6268	1,6818	0,1818	3,5670	3,3086
1,9151	1,9773	0,2273	4,1758	3,8923
2,2033	2,2727	0,2727	4,7847	4,4761
2,7799	2,8636	0,3636	6,0024	5,6435
3,3565	3,4545	0,4545	7,2201	6,8110

§ 26.

Considérations rétrospectives.

215. Les exemples de ponts des chapitres précédents, qui représentent les divers types de ponts-poutres, montrent l'emploi des règles générales contenues dans les 2me. et 3me. chapitres, en même temps que le mode de construction employé.

Des poutres continues se présentent dans les exemples du pont de Langon N°. **114**, du pont sur l'Eipel N°. **191**, sur la Vistule à Dirschau N°. **192**, sur le Boyne à Drogheda N°. **203** et du pont de Brittania N°. **201**.

Ces exemples montrent tous des ponts à parois pleines ou à système lattice, tandis que d'ordinaire les ponts en treillis reposent librement sur deux appuis; ces derniers peuvent du reste être aussi construits continus.

Les *poutres rectilignes et horizontales reposant librement sur les appuis* sont la forme la plus simple des ponts-poutres; outre les poutres en tôle, à parois pleines, contenues dans les N°s. **119** et **113**, le § 16 du cinquième chapitre contient une série de ponts en treillis rectilignes représentés plus en détail par les planches lithographiques IX à XII.

Les poutres reposant librement sur les appuis, à nervures cintrées sont souvent employées comme système *simple non-symétrique*, qu'elles soient paraboliques (§ 17) ou d'une autre forme (§ 18). Deux exemples calculés en détail: le pont sur le Main à Kitzingen, N°s. **172** et **173**, et le pont sur le Colomak, N°. **179** et **110**, montrent l'emploi des règles applicables à des formes de nervure quelconques; la remarque à la fin du N°. **110** montre la différence du reste peu importante entre ces deux exemples.

Les treillis doubles, non-symétriques sont représentés par les ponts sur le Danube à Ingolstadt, N°s. **159** et **160**, et sur l'Elbe à Tangermuende, N°s. **112** et **113**. La méthode du calcul se laisse aussi employer dans le cas d'un système triple.

Les pièces de pont ou entretoises, pour ponts de chemins de fer, sont calculées dans les N°s. **110**, **153**, **157** et **111**; dans ce dernier numéro, c'est une poutre en treillis; les exemples des N°s. **110** et **157** sont des poutres à parois pleines, tandis que l'entretoise du N°. **153** est en partie construite comme treillis et en partie comme poutre à parois pleines.

Les *longrines-sous-rails* sont ordinairement des poutres homogènes, en forme de **I**, dont le calcul peut être avantageusement fait à l'aide de la table XXIX, dès que les moments de flexion (égaux en nombre à ΣXy) sont connus d'après les tables XXX, ou déterminés d'après la méthode représentée par les figures 123, 181 ou 217.

216. *Les poids propres de ponts de chemins de fer* qu'on peut introduire dans les calculs statiques, sont indiqués dans la table XVII[a] et correspondent à une tension maximum dans les nervures de 700 kilogr. par centimètre carré.

Nous voulons comparer les poids des ponts dont nous nous sommes occupés jusqu'ici. Il existe une différence, même pour ces ponts construits d'une manière rationnelle, vu que dans le calcul, on a pris des surcharges et des tensions maxima différentes. La table LXII renferme aussi, outre les poids réels — par mètre et par voie — de la construction métallique p', les charges variables correspondantes, et les tensions admises dans les nervures.

Dans les constructions des ponts que nous considérons, on a toujours eu l'intention de produire dans la matière, dans toutes les parties des poutres principales, des mêmes efforts maxima — indiqués dans la table par „*tension maximum dans les nervures.*“ Le tablier — comprenant les pièces de pont et les longrines-sous-rails — est calculé ordinairement à une tension maximum plus faible, parce que ces parties du pont ont à souffrir du choc direct des voitures; cet amoindrissement de tension est du reste à-peu-près le même dans la plupart des ponts que nous considérons.

Il faut donc s'attendre à une variation du poids d'un pont dans le même rapport que varie la tension maximum adoptée dans les nervures; d'un autre côté, un pont sera d'autant plus lourd que, dans le calcul statique, la surcharge et le propre poids auront été pris plus grands.

Afin de *pouvoir comparer exactement les poids des ponts qui* nous occupent, il faut d'abord réduire le poids métallique à la même tension, que nous avons prise de $\mathfrak{A} = 700$ kilogr.; ces poids, ainsi modifiés, sont indiqués par la lettre p'_0.

Ensuite, il faudrait aussi prendre, pour chaque portée, le même mode de charge; nous avons ajouté la surcharge k de la table XVII[a] et nous l'avons désignée par k_a.

Les sommes des poids p'_0 et k_a, calculés tous d'après les mêmes principes, doivent être comparées à celles contenues dans les premières colonnes, c'est-à-dire à la somme des valeurs p' et k qui ont servi au calcul de ces ponts; il est à supposer que les ponts de même construction et de même portée, calculés d'après la table XVII[a] et pour une tension $\mathfrak{A} = 700$ kilogr. doivent être plus lourds dans le rapport $(p'_0 + k_a) : (p' + k)$, que les poids obtenus dans l'exécution.

Ces poids métalliques fictifs, modifiés dans le rapport $(p'_0 + k_a) : (p' + k)$, sont indiqués dans la table par la lettre p'_a, et enfin, dans la dernière colonne, on a ajouté la somme q'_a des valeurs p'_a et k_a qui correspond à un même mode de calcul de tous les projets. Cette dernière colonne est intéressante; on y voit que les valeurs de q'_a sont sensiblement constantes pour les

Table

	Désignation du pont.	Portée.	Surcharge — k — par mètre cour.	Tension maximum dans les nervures.	Poids métallique de la construction par mètre et par voie.
1.	Poutre en tôle à parois pleines, pour une voie, reposant librement. Portée d'après le § 12.	15,0 m	4750	650	33,3 l + 330 = 850
2.	Pont sur la Brenz, à Königsbronn, à une voie, reposant librement, treillis.	19,25 m	4660	530	42,7 l + 308 = 1130
3.	Pont canal sur la Blau, à Ehrenstein, à une voie, reposant librement, système lattice.	19,40 m	4660	660	36,0 l + 500 = 1200
4.	Projet pour les petites ouvertures du pont sur l'Elbe, à Meissen, à une voie, reposant librement, treillis parabolique.	21,6 m	5440	700	27,0 l + 325 = 900
5.	Pont sur la Brahe, à Czersk, à une voie, reposant librement, treillis parabolique.	25,4 m	4470	684	26,3 l + 338 = 1078
6.	Pont sur le Colomak, à une voie, reposant librement, treillis.	33,8 m	4564	670	34,3 l + 460 = 1620
7.	Pont sur le Main, à Kitzingen, à une voie, reposant librement, système Pauli.	37,0 m	7800 *)	734	23,5 l + 314 = 1180
8.	Pont sur l'Isar, à Munich, à une voie, reposant librement, treillis.	50,2 m	5440	600	37,3 l + 668 = 2634
9.	Pont sur le Danube, à Ingolstadt, à une voie, reposant librement, treillis.	54,24 m	4840	600	41,0 l + 685 = 2908

LXII.

$p' - k$	$p_0' =$ p' réduit à $\mathfrak{P} = 700$ kilogr.	k_a d'après la table XVII[a]	$q_a = p'_0 + k_a$	$p'_a =$ poids métallique de la construction, réduit dans le rapport $q_a : (p' - k)$	$k_a + p'_a$
5600	31,0 l + 306 = 770	4750	5520	30,5 l + 300 = 757	5507
5790	32,3 l + 233 = 855	4660	5515	31,0 l + 218 = 815	5475
5860	34,0 l + 470 = 1130	4660	5790	33,4 l + 464 = 1112	5772
6340	27,0 l + 325 = 900	4600	5500	23,6 l + 284 = 794	5394
5548	25,7 l + 330 = 982	4550	5532	25,7 l + 330 = 982	5532
6184	32,8 l + 440 = 1550	4440	5990	31,7 l + 428 = 1500	5940
5980	24,8 l + 330 = 1240	4420	5660	23,4 l + 313 = 1180	5600
8074	32,4 l + 630 = 2260	4230	6490	25,9 l + 504 = 1805	6035
7748	35,1 l + 587 = 2490	4200	6690	30,2 l + 500 = 2138	6338

Table

	Désignation du pont.	Portée.	Surcharge $\frac{k}{l}$ par mètre cour.	Tension maximum dans les nervures.	Poids métallique de la construction par mètre et par voie.
10.	Pont sur l'Elbe, à Meissen, à une voie, reposant librement, treillis.	54,6m	4142	731	29,7 l + 346 = 1970
11.	Pont sur l'Elbe, à Tangermuende, à double voie, reposant librement, système Schwedler.	65,9m	3725	731	20,9 l + 440 = 1817
12.	Pont de Langon, à double voie, continu, à parois pleines.	68,0m **)	4000	700	27,0 l + 445 = 2274
13.	Pont sur le Boyne, à Drogheda, à double voie, continu, système lattice.	81,4m ***)	3333	700	26,0 l + 290 = 2407
14.	Pont sur le Rhin, à Cologne. à double voie, continu, système lattice.	98,22	2550	731	27,9 l + 420 = 3336
15.	Pont sur le Rhin, à Mayence, à simple voie, reposant librement, système Pauli,	105,2	2930	820	24,331 + 676 = 3230
16.	Pont Royal-Albert, à Saltash, à une voie, reposant librement, treillis parabolique.	138,68	3334	700	39,3 l + 1125 = 6575

*) Y compris 1000 kilogr. par mètre pour le ballast.

**) Portée moyenne des trois ouvertures, dont on a pris le poids moyen.

***) Poids d'une ouverture du milieu.

LXII.

$p' + k$	$p_a' =$ p' réduit à $\mathfrak{P} = 700$ kilogr.	k_a d'après la table XVII^a.	$q_a = p'_a + k_a$.	$p'_a =$ poids métallique de la construction, réduit dans le rapport $q_a : (p' + k)$	$k_a + p'_a$
6100	31,01 + 36 0 = 2054	4200	6254	31,81 + 370 = 2116	6316
5542	21,81 + 460 = 1896	4000	5896	23,21 + 490 = 2020	5916
6274	27,01 + 445 = 2274	4000	6274	27,01 + 445 = 2274	6274
5740	26,01 + 290 = 2407	3850	6257	28,31 + 316 = 2620	6470
5886	29,11 + 438 = 3483	3700	7183	35,51 + 534 = 4020	7720
6160	28,51 + 792 = 3780	3650	7480	34,21 + 952 = 4550	8200
9909	39,31 + 1125 = 6575	3334	9909	39,31 + 1125 = 6575	9909

portées de 30 à 80 mètres, quel que soit le mode de construction; cela n'est pas étonnant puisque, dans l'avant-dernière colonne, les valeurs de p'_a augmentent assez régulièrement avec la grandeur des travées, tandis qu'au contraire les valeurs de k_a, calculées d'après la table XVII^a, diminuent. D'un autre côté, nous avons montré dans le N^o. **198**, que le poids propre p' augmente à partir de 80 mètres de portée plus rapidement que la surcharge k ne diminue.

On voit aussi que les ponts à double voie sont relativement plus légers que ceux à une voie; c'est en partie à cette cause qu'est dû le faible poids du pont sur le Rhin à Cologne comparé à celui du pont sur le Rhin à Mayence, construit avec un soin particulier; néanmoins il faut ajouter que dans notre comparaison, nous n'avons pu tenir compte de ce que quelques pièces de construction peuvent être soumises à des efforts plus grands, ensorte que la valeur de chacun des systèmes ne peut pas être jugée d'une façon absolue d'après les poids indiqués; nous croyons pouvoir tirer au contraire de cette table le résultat: que tous les systèmes rationnellement employés, pour des mêmes portées, et dans les mêmes circonstances présentent des poids sensiblement analogues, qui diffèrent principalement par le degré de soin apporté dans la construction des détails. —

APPENDICE.

Table des fonctions trigonométriques.

Dans les dessins de constructions, on peut toujours obtenir la tangente ou la cotangente d'un angle donné; la table suivante sert alors à la détermination des autres fonctions trigonométriques.

degré.	min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
0	0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	0	90
	10	0,00291	0,99999	0,00291	343,77371	50	
	20	0,00582	0,99998	0,00582	171,88540	40	
	30	0,00873	0,99996	0,00873	114,58865	30	
	40	0,01164	0,99993	0,01164	85,93979	20	
	50	0,01554	0,99989	0,01455	68,75009	10	
1	0	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	0	89
	10	0,02036	0,99979	0,02036	49,10388	50	
	20	0,02327	0,99973	0,02328	42,96408	40	
	30	0,02618	0,99966	0,02619	38,18846	30	
	40	0,02908	0,99958	0,02910	34,36777	20	
	50	0,03199	0,99949	0,03201	31,24158	10	
2	0	0,03490	0,99939	0,03492	28,63615	0	88
	10	0,03781	0,99929	0,03783	26,43160	50	
	20	0,04071	0,99917	0,04075	24,54176	40	
	30	0,04362	0,99905	0,04366	22,90377	30	
	40	0,04653	0,99892	0,04658	21,47040	20	
	50	0,04943	0,99878	0,04949	20,20555	10	
3	0	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	0	87
	10	0,05524	0,99847	0,05533	18,07498	50	
	20	0,05814	0,99831	0,05824	17,16934	40	
	30	0,06105	0,99813	0,06116	16,34985	30	
	40	0,06395	0,99795	0,06408	15,60478	20	
	50	0,06685	0,99776	0,06700	14,92442	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	min.	degré.

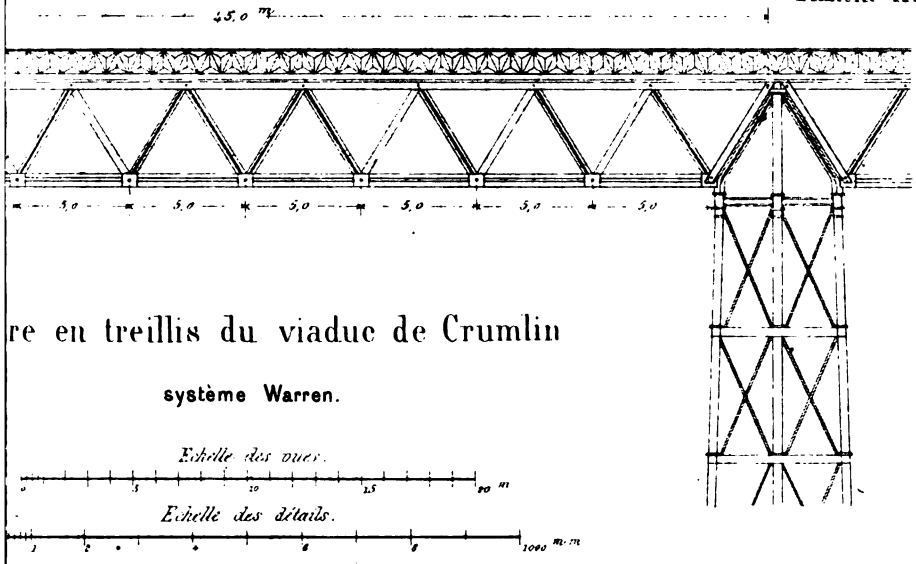
degré.	min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
4	0	0,06976	0,99759	0,06993	14,30067	0	86
	10	0,07266	0,99736	0,07285	13,72674	50	
	20	0,07556	0,99714	0,07578	13,19688	40	
	30	0,07846	0,99692	0,07870	12,70620	30	
	40	0,08136	0,99668	0,08163	12,25051	20	
	50	0,08426	0,99644	0,08456	11,82617	10	
5	0	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	0	85
	10	0,09005	0,99594	0,09042	11,05943	50	
	20	0,09295	0,99567	0,09335	10,71191	40	
	30	0,09585	0,99540	0,09629	10,38540	30	
	40	0,09874	0,99511	0,09923	10,07803	20	
	50	0,10164	0,99482	0,10216	9,78817	10	
6	0	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	0	84
	10	0,10742	0,99421	0,10805	9,25530	50	
	20	0,11031	0,99390	0,11099	9,00983	40	
	30	0,11320	0,99357	0,11393	8,77681	30	
	40	0,11609	0,99324	0,11688	8,55555	20	
	50	0,11898	0,99290	0,11983	8,34496	10	
7	0	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	0	83
	10	0,12476	0,99219	0.12574	7,95302	50	
	20	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40	
	30	0,13053	0,99144	0,13195	7,59575	30	
	40	0,13341	0,99106	0,13461	7,42871	20	
	50	0,13629	0,99067	0,13758	7,26873	10	
8	0	0,13916	0,99027	0,14054	7,11537	0	82
	10	0,14205	0,98986	0,14351	6,96823	50	
	20	0,14493	0,98944	0,14648	6,82694	40	
	30	0,14781	0,98902	0,14945	6,69116	30	
	40	0,15069	0,98858	0,15243	6,56055	20	
	50	0,15356	0,98814	0,15540	6,43484	10	
9	0	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	0	81
	10	0,15931	0,98723	0,16137	6,19703	50	
	20	0,16218	0,98676	0,16434	6,08444	40	
	30	0,16505	0,98629	0,16734	5,97567	30	
	40	0,16792	0,98580	0,17033	5,87080	20	
	50	0,17078	0,98531	0,17333	5,76128	10	
10	0	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	0	80
	10	0,17651	0,98430	0,17933	5,57638	50	
	20	0,17937	0,98378	0,18233	5,48451	40	
	30	0,18224	0,98325	0,18534	5,39552	30	
	40	0,18509	0,98272	0,18835	5,30928	20	
	50	0,18795	0,98218	0,19136	5,22566	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	min.	degré.

degré.	min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
11	0	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	0	79
	10	0,19366	0,98107	0,19740	5,06534	50	
	20	0,19652	0,98050	0,20042	4,98950	40	
	30	0,19937	0,97992	0,20345	4,91516	30	
	40	0,20222	0,97934	0,20648	4,84300	20	
	50	0,20507	0,97875	0,20952	4,77286	10	
12	0	0,20791	0,97815	0,21256	4,70464	0	78
	10	0,21076	0,97754	0,21560	4,63825	50	
	20	0,21360	0,97692	0,21864	4,57363	40	
	30	0,21644	0,97630	0,22169	4,51071	30	
	40	0,21928	0,97566	0,22475	4,44942	20	
	50	0,22212	0,97502	0,22781	4,38969	10	
13	0	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	0	77
	10	0,22778	0,97371	0,23393	4,27471	50	
	20	0,23062	0,97304	0,23700	4,21933	40	
	30	0,23345	0,97237	0,24008	4,16530	30	
	40	0,23627	0,97169	0,24316	4,11256	20	
	50	0,23910	0,97100	0,24624	4,06107	10	
14	0	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	0	76
	10	0,24474	0,96959	0,25242	3,96165	50	
	20	0,24756	0,96887	0,25551	3,91364	40	
	30	0,25038	0,96815	0,25862	3,86671	30	
	40	0,25320	0,96742	0,26172	3,82083	20	
	50	0,25601	0,96667	0,26483	3,77516	10	
15	0	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	0	75
	10	0,26163	0,96517	0,27107	3,68909	50	
	20	0,26443	0,96440	0,27419	3,64705	40	
	30	0,26724	0,96363	0,27732	3,60588	30	
	40	0,27004	0,96285	0,28046	5,56557	20	
	50	0,27284	0,96206	0,28360	3,52609	10	
16	0	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	0	74
	10	0,27843	0,96046	0,28990	3,44951	50	
	20	0,28123	0,95964	0,29305	3,41236	40	
	30	0,28402	0,95882	0,29621	3,37594	30	
	40	0,28680	0,95799	0,29938	3,34023	20	
	50	0,28958	0,95715	0,30255	3,30521	10	
17	0	0,29237	0,95639	0,30573	3,27085	0	73
	10	0,29515	0,95545	0,30891	3,23714	50	
	20	0,29793	0,95459	0,31210	3,20406	40	
	30	0,30071	0,95372	0,31530	3,17159	30	
	40	0,30348	0,95284	0,31850	3,13972	20	
	50	0,30625	0,95195	0,32171	3,10842	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	min.	degré.

degré.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
18	0	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	0	65
	10	0,31178	0,95015	0,32814	3,04749	50	
	20	0,31454	0,94924	0,33136	3,01783	40	
	30	0,31730	0,94833	0,33460	2,98868	30	
	40	0,32006	0,94740	0,33783	2,96004	20	
	50	0,32282	0,94646	0,34108	2,93189	10	
19	0	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	0	64
	10	0,32832	0,94457	0,34758	2,87700	50	
	20	0,33106	0,94361	0,35085	2,85023	40	
	30	0,33381	0,94264	0,35412	2,82391	30	
	40	0,33655	0,94167	0,35740	2,79802	20	
	50	0,33929	0,94068	0,36068	2,77254	10	
20	0	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	0	63
	10	0,34475	0,93869	0,36727	2,72281	50	
	20	0,34748	0,93769	0,37057	2,69853	40	
	30	0,35021	0,93667	0,37388	2,67462	30	
	40	0,35293	0,93565	0,37720	2,65109	20	
	50	0,35565	0,93462	0,38053	2,62791	10	
21	0	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	0	62
	10	0,36108	0,93253	0,38721	2,58161	50	
	20	0,36379	0,93148	0,39055	2,56046	40	
	30	0,36650	0,93042	0,39391	2,53865	30	
	40	0,36921	0,92935	0,39727	2,51715	20	
	50	0,37191	0,82827	0,40065	2,49597	10	
22	0	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	0	61
	10	0,37730	0,92609	0,40741	2,45451	50	
	20	0,37999	0,92499	0,41081	2,43422	40	
	30	0,38268	0,92388	0,41421	2,41421	30	
	40	0,38537	0,92276	0,41763	2,39449	20	
	50	0,38805	0,92164	0,42105	2,37504	10	
23	0	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	0	60
	10	0,39341	0,91936	0,42791	2,33693	50	
	20	0,39608	0,91822	0,43136	2,31826	40	
	30	0,39875	0,91706	0,43481	2,29984	30	
	40	0,40141	0,91590	0,43828	2,28167	20	
	50	0,40408	0,91472	0,44175	2,26374	10	
24	0	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	0	59
	10	0,40939	0,91236	0,44872	2,22857	50	
	20	0,41204	0,91116	0,45222	2,21132	40	
	30	0,41469	0,90996	0,45573	2,19430	30	
	40	0,41734	0,90875	0,45924	2,17749	20	
	50	0,41998	0,90753	0,46277	2,16090	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	min.	degré.

degré.	min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
25	0	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	0	65
	10	0,42525	0,90507	0,46985	2,12832	50	
	20	0,42788	0,90383	0,47341	2,11233	40	
	30	0,43051	0,90259	0,47698	2,09654	30	
	40	0,43313	0,90133	0,48055	2,08094	20	
	50	0,43575	0,90007	0,48414	2,06553	10	
26	0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	0	64
	10	0,44098	0,89752	0,49134	2,03526	50	
	20	0,44359	0,89623	0,49495	2,02039	40	
	30	0,44620	0,89493	0,49858	2,00569	30	
	40	0,44880	0,89363	0,50222	1,99116	20	
	50	0,45140	0,89232	0,50587	1,97680	10	
27	0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	0	63
	10	0,45658	0,88968	0,51319	1,94858	50	
	20	0,45917	0,88835	0,51688	1,93470	40	
	30	0,46175	0,88701	0,52057	1,92098	30	
	40	0,46473	0,88566	0,52427	1,90741	20	
	50	0,46690	0,88431	0,52798	1,89400	10	
28	0	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0	62
	10	0,47204	0,88158	0,53545	1,86760	50	
	20	0,47460	0,88020	0,53920	1,85462	40	
	30	0,47716	0,87882	0,54296	1,84177	30	
	40	0,47971	0,87743	0,54673	1,82906	20	
	50	0,48226	0,87603	0,55051	1,81649	10	
29	0	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	0	61
	10	0,48735	0,87321	0,55812	1,79174	50	
	20	0,48989	0,87178	0,56194	1,77955	40	
	30	0,49242	0,87036	0,56577	1,76749	30	
	40	0,49495	0,86892	0,56962	1,75556	20	
	50	0,49748	0,86748	0,57348	1,74375	10	
30	0	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	0	60
	10	0,50252	0,86457	0,58124	1,72047	50	
	20	0,50503	0,86310	0,58513	1,70901	40	
	30	0,50754	0,86163	0,58904	1,69766	30	
	40	0,51004	0,86015	0,59297	1,68643	20	
	50	0,51254	0,85866	0,59691	1,67530	10	
31	0	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	0	59
	10	0,51753	0,85567	0,60483	1,65337	50	
	20	0,52002	0,85416	0,60881	1,64256	40	
	30	0,52250	0,85264	0,61280	1,63186	30	
	40	0,52498	0,85112	0,61681	1,62125	20	
	50	0,52745	0,84959	0,62083	1,61074	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	min.	degré.

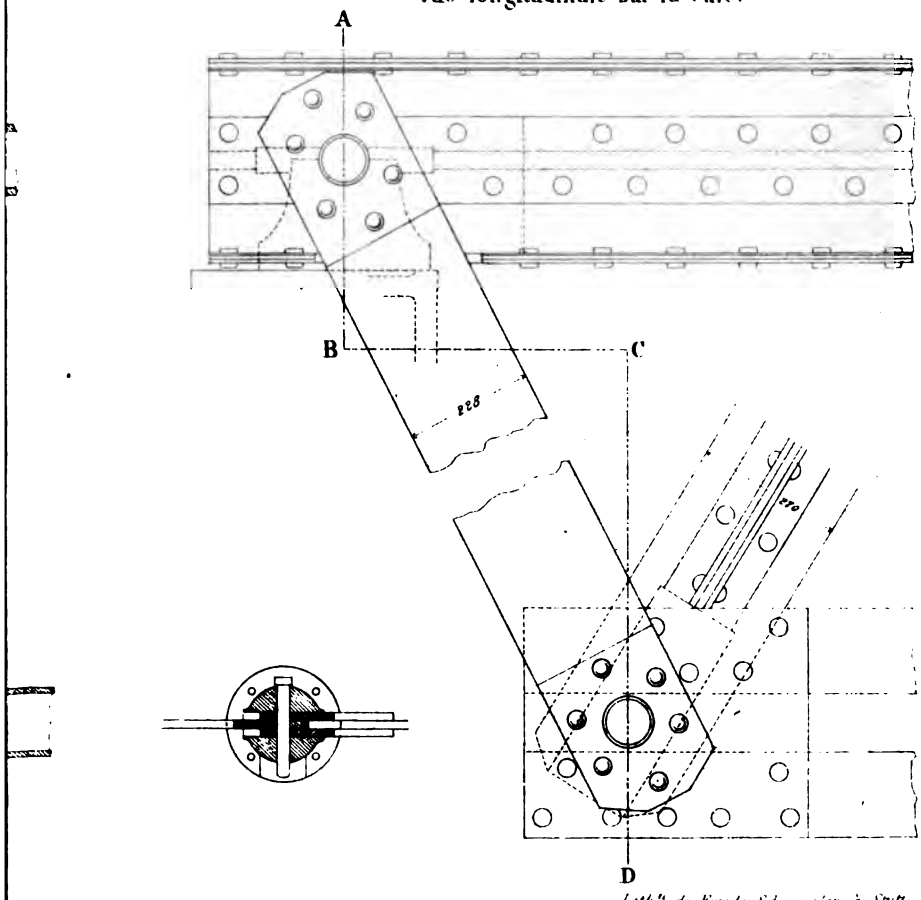
Planche IX.



re en treillis du viaduc de Crumlin

système Warren.

Vue longitudinale sur la culée



Lith.ie de Friedr. Schepperlen à Stuttg.

ENGINEERING LIBRARY

TG 416 .L3414 1871 C.1
Calcul et construction des pon
Stanford University Libraries
3 6105 030 440 734

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

ENGINEERING LIBRARY

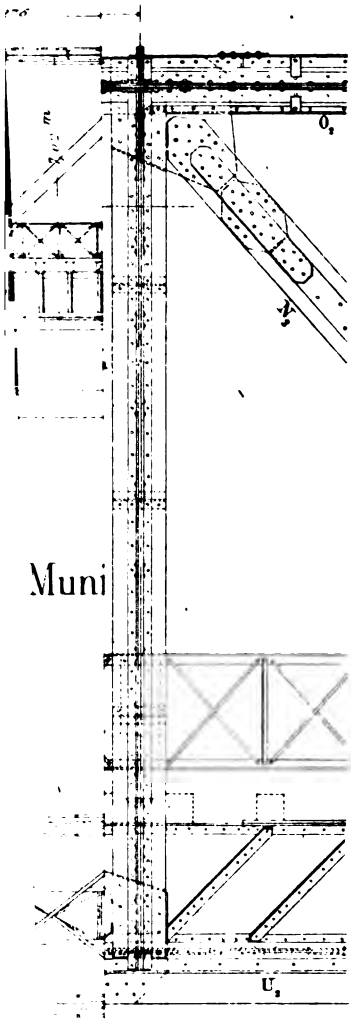
TG 416 .L3414 1871 C.1
Calcul et construction des pon
Stanford University Libraries
3 6105 030 440 734

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

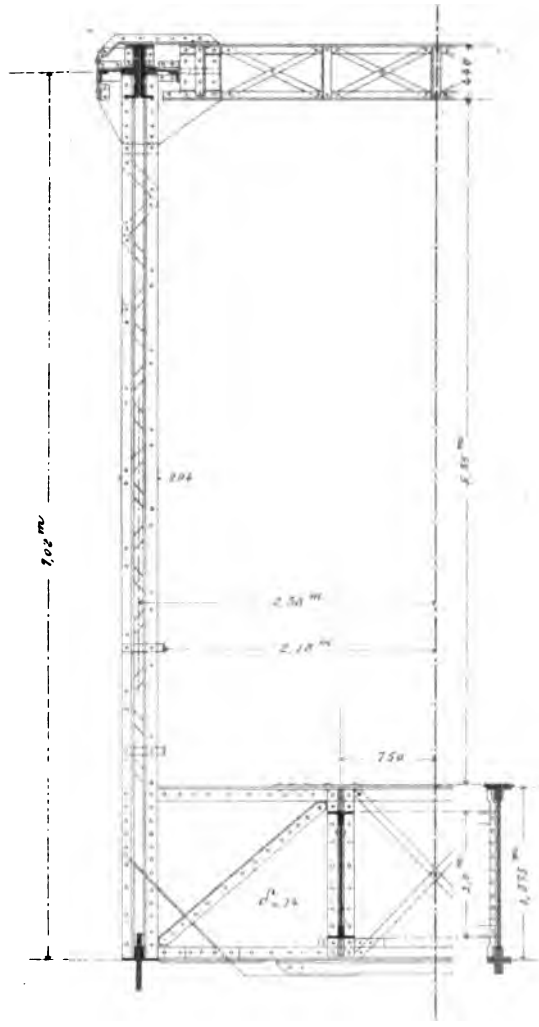
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

Vue



Muni

pale.



Demi-coupe transversale.

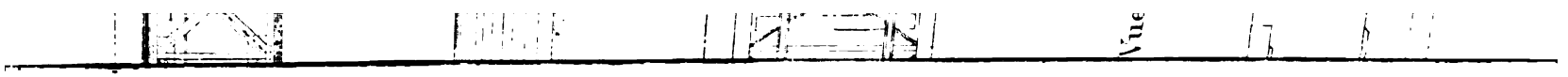
...ue et du Plan 1:200.

10 20 m

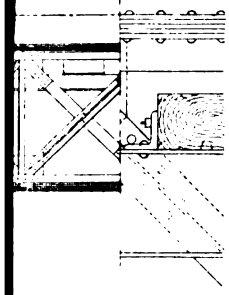
des détails. 1:60.

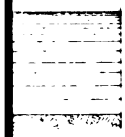
3 4 5 6 7 m

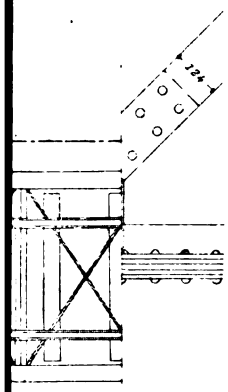
Lith.ie de Friedr. Schepperlen à Stuttgart.


Vue

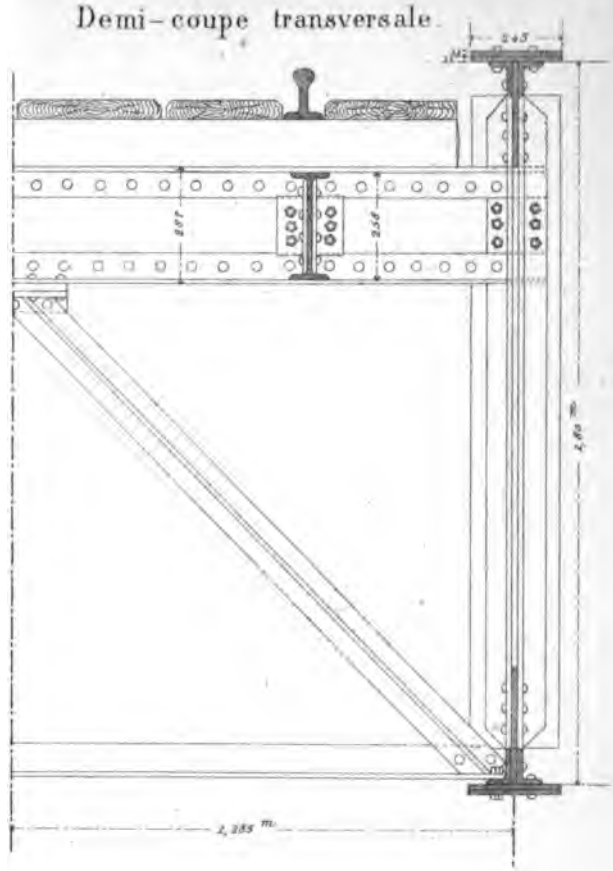
udinale.





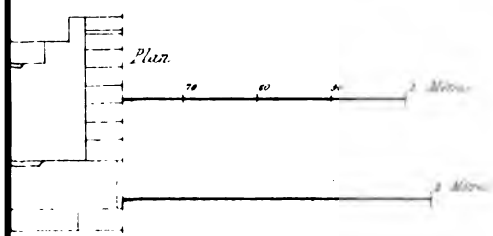


Demi-coupe transversale.

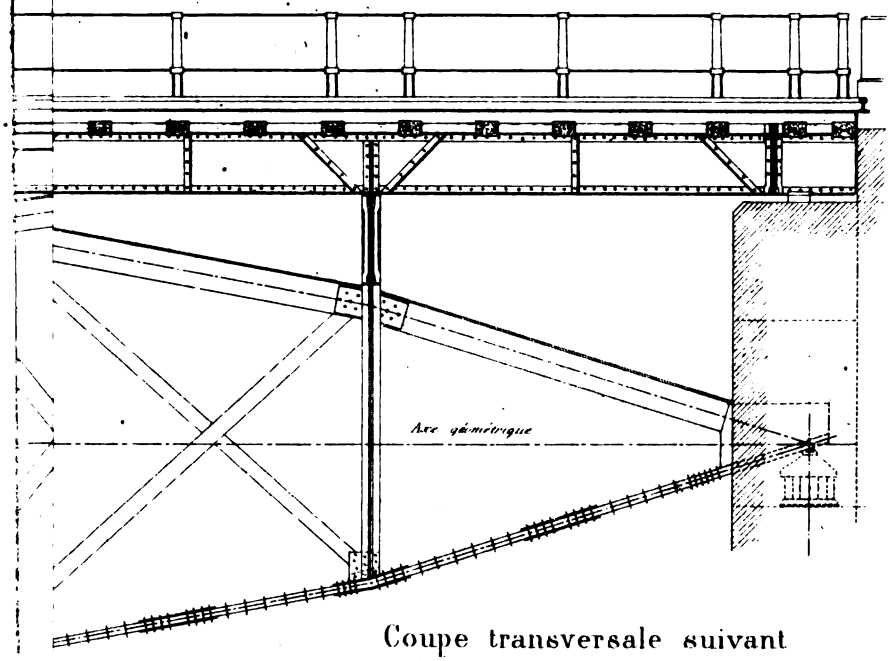


Vue tra

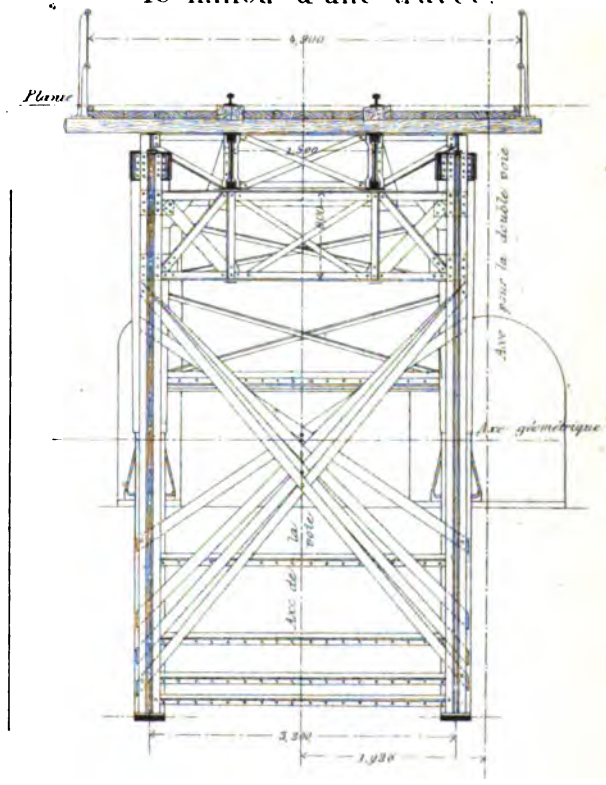
nz, près de Königsbronn.



Lith.ie de Friedr. Schepperlen à Stuttgart.

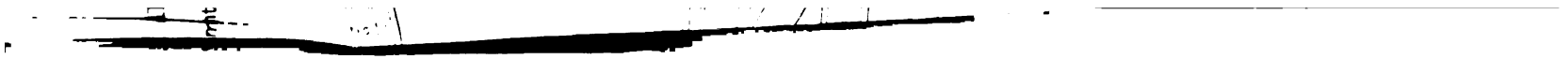


Coupe transversale suivant
le milieu d'une travée.

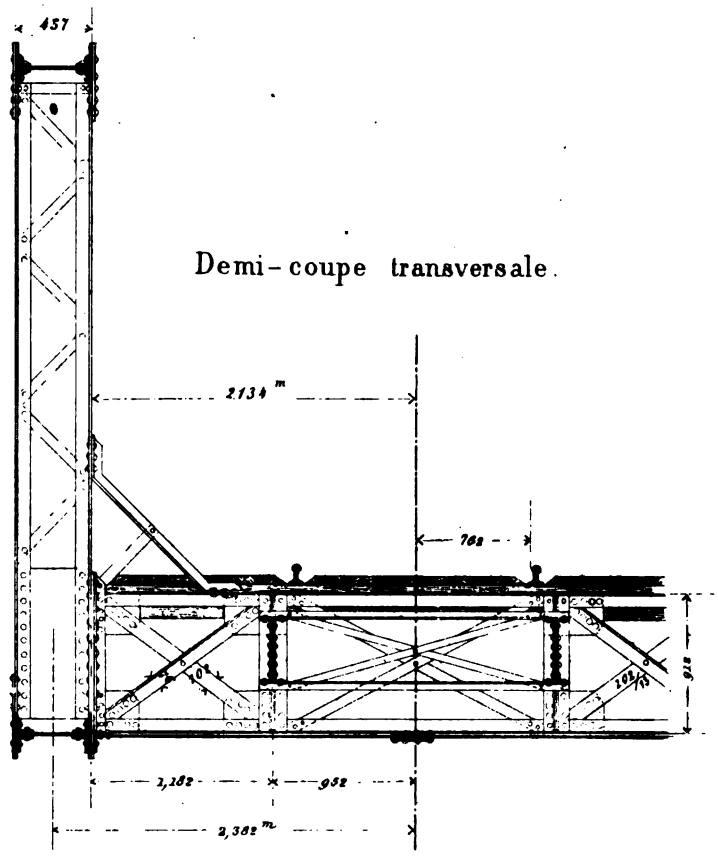


le Main

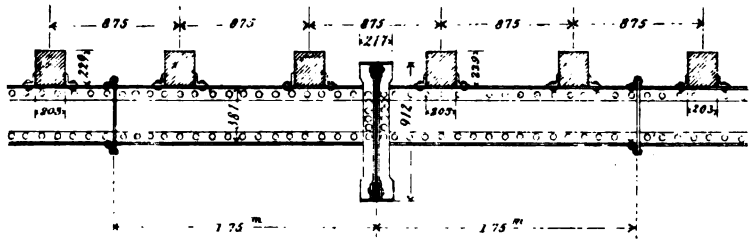
7 mètres



Demi-coupe transversale.



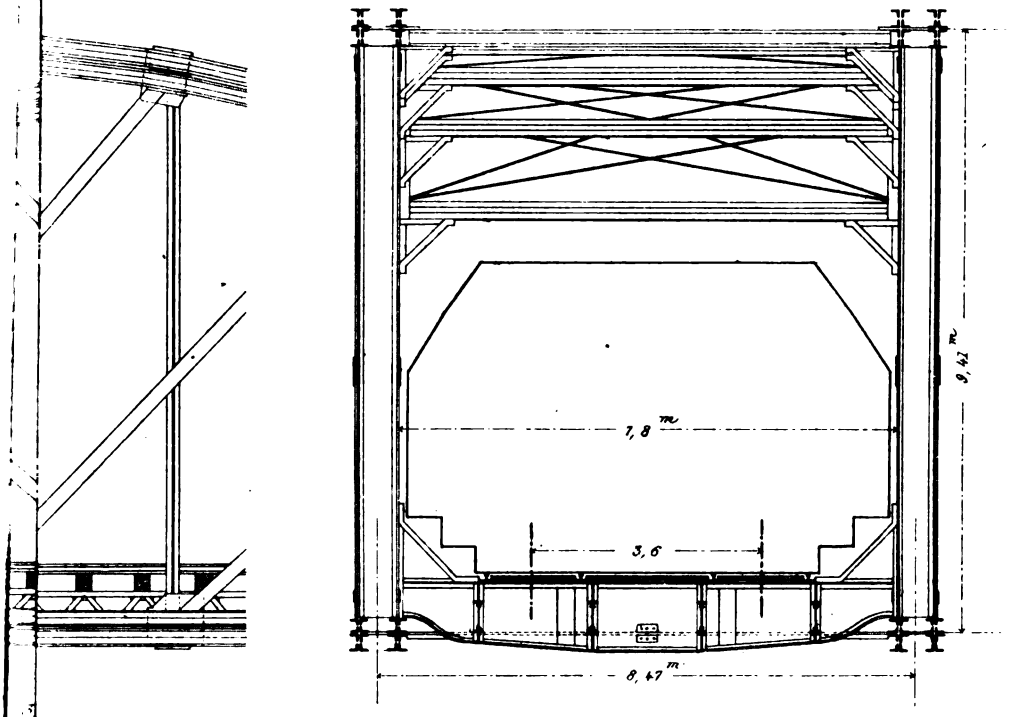
Vue des longrines-sous-rail.



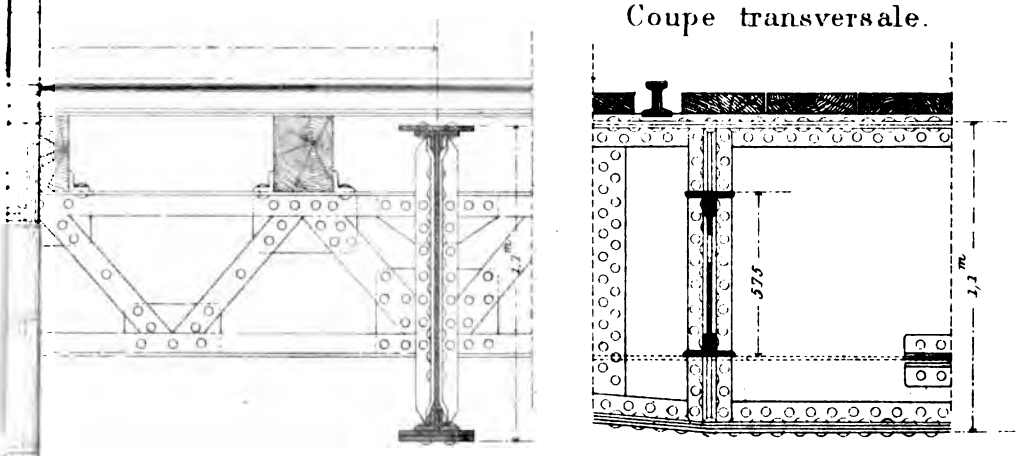
Lith.ie de Friedr. Schepperlen à Stuttgart.

Planche XV.

Vue transversale



Coupe transversale.



…e près de Tangermünde.

…stème Schwedler.

…r la vue et du plan 1 : 120

5 — 10 mètres

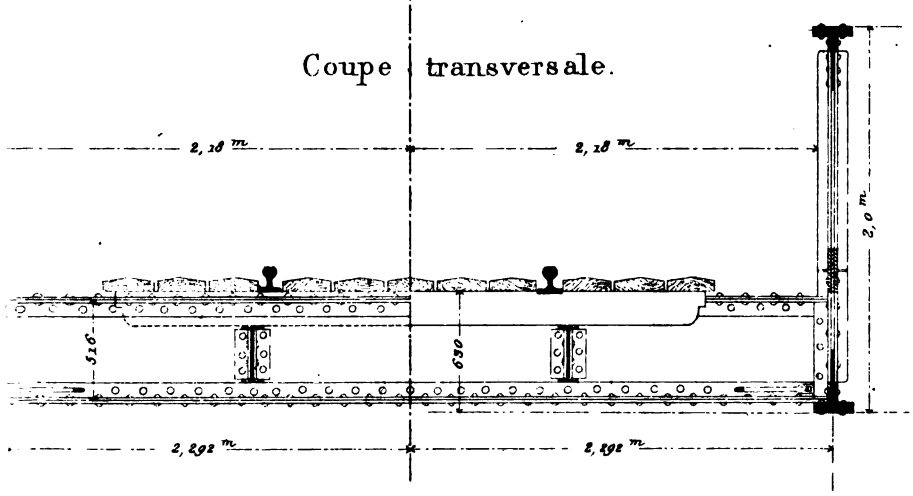
…chelle des détails.

0,6 — 1,0 — 2,0 mètres

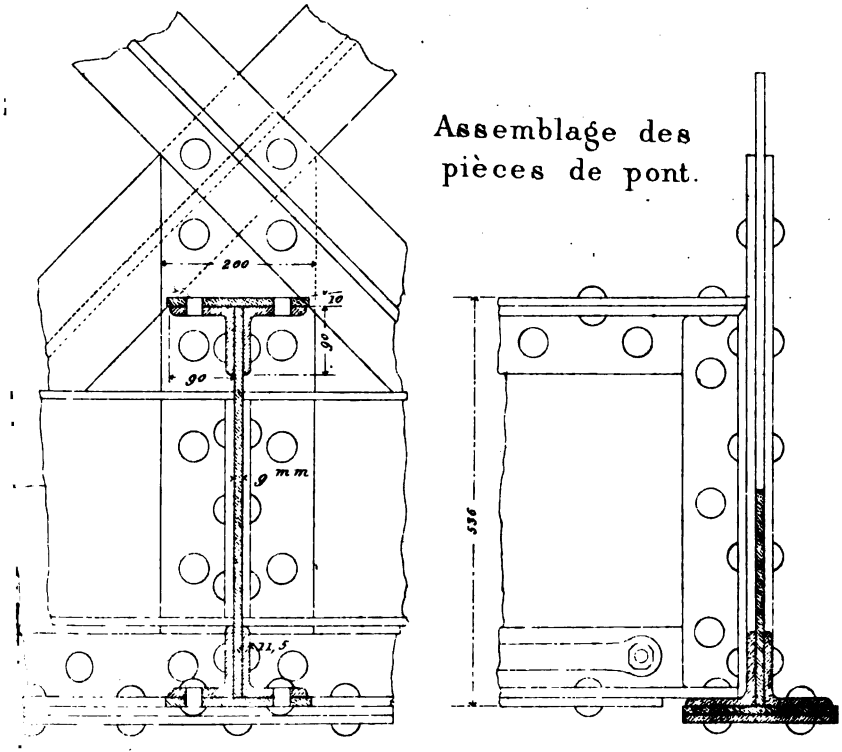
Lith.ie de Friedr. Schepperlen à Stuttgart

Planche XVI.

Coupe transversale.



Assemblage des pièces de pont.



Lith.to de Friedr. Schepperlen à Stuttgart.

Echelle des détails 1:10

4 6 8 10

Doc. M.

ENGINEERING LIBRARY

TG 416 .L3414 1871 C.1
Calcul et construction des pon
Stanford University Libraries
3 6105 030 440 734

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004